Topologie :
Résultats sur les voisinages

Jean-Baptiste Campesato

8 septembre 2009

Le but de ce papier est de démontrer que les espaces topologiques sont caractérisés par leurs voisinages, il s'agit d'une propriété peu étudiée dans les premières années post bac bien qu'à mon avis très intéressante pour aborder la topologie générale. On la retrouve aux pages 2 et 3 du livre Topologie Générale I-IV de N. Bourbaki (un des plus accessibles de l'auteur), cependant avec une démonstration assez élémentaire, ainsi que dans le Cours de mathématiques spéciales, tome 2. Topologie, Analyse réelle de B. Gostiaux avec une démonstration plus détaillée.
Seules les notions de topologie nécessaires à la démonstration seront rappelées.

Définitions

On nomme *structure topologique* (ou *topologie*) un ensemble $\mathcal{O}$ de parties d'un ensemble E vérifiant :
- $\varnothing \in \mathcal{O}$ et $E \in \mathcal{O}$.
- Toute réunion d'ensembles de $\mathcal{O}$ appartient aussi à $\mathcal{O}$.
- Toute intersection *finie* d'ensembles de $\mathcal{O}$ appartient à $\mathcal{O}$.

Les ensembles de $\mathcal{O}$ sont nommés les *ouverts* de la topologie définie par $\mathcal{O}$ sur E.

On nomme *espace topologique* un ensemble muni d'une topologie.

Les éléments d'un espace topologique sont souvent nommés points.

En réalité seuls les deux derniers points sont vraiment nécessaires. En effet d'après le deuxième point $\varnothing \in \mathcal{O}$ comme réunion de la partie vide de $\mathcal{O}$ et d'après le troisième point $E \in \mathcal{O}$ comme intersection de la partie vide de $\mathcal{O}$. Voir le fichier note.pdf

Définition

Soit E un espace topologique pour la topologie $\mathcal{O}$.
Pour tout $x \in E$, une partie V de E est dite voisinage de x s'il existe $O \in \mathcal{O}$ tel que $x \in O \subset V$.

Bien que définie sur un point au début des études universitaires, la notion de voisinage est en fait définie de façon plus large sur une partie de E. Voir le livre de N. Bourbaki à ce sujet.

Proposition 1: caractérisation des ouverts à l'aide de la notion de voisinage (rappel)

Soit E un espace topologique pour la topologie $\mathcal{O}$.
Pour qu'une partie A de E soit un ouvert il faut et il suffit que A soit voisinage de tous ses points.

Démonstration :

$\Rightarrow$: Soit $O \in \mathcal{O}$ alors $\forall x \in O$, O est un ouvert et $x \in O \subset O$.
Donc O est un voisinage de x.

$\Leftarrow$: Soit A une partie de E voisinage de tous ses points.
Si $A = \varnothing$ alors A est un ouvert.
Supposons donc $A \neq \varnothing$.
Comme A est voisinage de tous ses points, $\forall x \in A$, $\exists O_x \in \mathcal{O}$ tel que $x \in O_x \subset A$.
Puis comme $\forall x \in A$, $O_x \subset A$, on a $\bigcup_{x \in A} O_x \subset A$.
Enfin comme $\forall x \in A$, $x \in O_x$, on a $x \in \bigcup_{x \in A} O_x$ et donc $A \subset \bigcup_{x \in A} O_x$.
Ainsi $A = \bigcup_{x \in A} O_x$ qui est un ouvert comme réunion d'ouverts.

$\blacksquare$

$\mathfrak{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E.
Donc ici :
$\mathcal{V}(x) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$.

Proposition 2: caractérisation d'une topologie par ses voisinages

Si pour tout x d'un ensemble E on se donne $\mathcal{V}(x) \subset \mathfrak{P}(E)$ vérifiant les points suivants, on construit une unique structure topologique pour E telle que pour tout x de E, $\mathcal{V}(x)$ soit l'ensemble des voisinages de x.
De même, pour toute topologie, les voisinages respectent les points suivants.
On obtient donc une caractérisation des topologies par leurs voisinages.

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{V_I}) & \forall x \in E,\, \mathcal{V}(x) \neq \varnothing \\
(\mathrm{V_{II}}) & \forall V \in \mathcal{V}(x),\, x \in V \\
(\mathrm{V_{III}}) & \forall (V,W) \in \mathcal{V}(x)^2,\, V \cap W \in \mathcal{V}(x) \\
(\mathrm{V_{IV}}) & \forall A \in \mathfrak{P}(E),\, \forall V \in \mathcal{V}(x),\, V \subset A \Rightarrow A \in \mathcal{V}(x) \\
(\mathrm{V_V}) & \forall V \in \mathcal{V}(x),\, \exists W \in \mathcal{V}(x),\, y \in W \Rightarrow V \in \mathcal{V}(y)
\end{array}
$$

On peut donc définir une topologie sur E en se donnant des ensembles de voisinages des points de E vérifiant les axiomes ci-dessus.

Démonstration :

On commence par le sens le plus simple.
$\Leftarrow$: Soit E un espace topologique pour la topologie $\mathcal{O}$.

1. $\forall x \in E$, $E \in \mathcal{V}(x)$ donc $\mathcal{V}(x) \neq \varnothing$.
2. $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists O \in \mathcal{O}$ tel que $x \in O \subset V$. Donc $x \in V$.
3. Soient $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}(x)^2$ alors $\exists (O_1, O_2) \in \mathcal{O}^2$ tel que $\begin{cases} x \in O_1 \subset V_1 \\ x \in O_2 \subset V_2 \end{cases}$.
   On a donc $O_1 \cap O_2$ ouvert comme intersection d'ouverts et $x \in O_1 \cap O_2 \subset V_1 \cap V_2$.
   Donc $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$.
4. Soient $A \in \mathfrak{P}(E)$ et $V \in \mathcal{V}(x)$ tels que $V \subset A$,
   alors $\exists O \in \mathcal{O}$ tel que $x \in O \subset V \subset A$.
   Donc $x \in O \subset A$ avec $O \in \mathcal{O}$.
   Donc $A \in \mathcal{V}(x)$.
5. Soit $V \in \mathcal{V}(x)$, alors $\exists O \in \mathcal{O}$ tel que $x \in O \subset V$.
   Pour tout $y \in O$ on a $y \in O \subset V$ avec O ouvert, donc $y \in O \Rightarrow V \in \mathcal{V}(y)$.
   Puis comme $O \in \mathcal{O}$ et $x \in O$, d'après la propriété précédente, $O \in \mathcal{V}(x)$.
   Donc $W = O$ convient.

$\Rightarrow$: Supposons désormais que l'on ait des $\mathcal{V}(x)$ vérifiant les points ci-dessus.
Comme d'après la proposition précédente les ouverts d'une topologie sont les parties voisinages de tous leurs points, on pose $\mathcal{O} = \{O \in \mathfrak{P}(E) \setminus \forall x \in O,\, O \in \mathcal{V}(x)\}$.
Montrons que l'on construit ainsi une topologie :

1. $\forall x \in E$, $\mathcal{V}(x) \neq \varnothing \Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x)$ *(Car* $(\mathrm{V_I})$*)*
   et comme $V \subset E$, on a $E \in \mathcal{V}(x)$ *(Car* $(\mathrm{V_{IV}})$*)*.
   Donc $E \in \mathcal{O}$.
2. $\forall x \in \varnothing, \varnothing \in \mathcal{V}(x)$ d'après le prédicat sur l'ensemble vide (ie. tout est vrai après $\forall x \in \varnothing$).
   Donc $\varnothing \in \mathcal{O}$.
3. Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathcal{O}$.
   Soit $O = \displaystyle\bigcup_{i \in I} O_i$. Si $O = \varnothing$ alors $O \in \mathcal{O}$. Sinon $\forall x \in O$, $\exists j$ tel que $x \in O_j$.
   Comme par définition de $\mathcal{O}$ on a $O_j \in \mathcal{V}(x)$ et que l'on a aussi que $O_j \subset O$, $O \in \mathcal{V}(x)$ d'après $(\mathrm{V_{IV}})$. Et donc $O \in \mathcal{O}$.
4. Soit $(O_1, O_2) \in \mathcal{O}^2$.
   Si $O_1 \cap O_2 = \varnothing$, $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$. Sinon $\forall x \in O_1 \cap O_2$ on a $\begin{cases} O_1 \in \mathcal{V}(x) \\ O_2 \in \mathcal{V}(x) \end{cases}$
   par définition de $\mathcal{O}$. Et donc $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{V}(x)$ d'après $(\mathrm{V_{III}})$.
   Donc $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.
   Par récurrence on montre ensuite que toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{O}$ appartient à $\mathcal{O}$.

Il faut maintenant montrer l'aspect caractérisant de la propriété, c'est-à-dire qu'il faut vérifier que pour tout $x \in E$, les voisinages de x pour la topologie ainsi construite sont les éléments de $\mathcal{V}(x)$.

- Soit $x \in E$. Montrons que les $V \in \mathcal{V}(x)$ sont des voisinages de x pour la topologie construite :
  Soit $V \in \mathcal{V}(x)$, on considère $O = \{y \in E \setminus V \in \mathcal{V}(y)\}$.
  Comme $V \in \mathcal{V}(x)$ on a bien que $x \in O$. Puis $\forall y \in O$, $V \in \mathcal{V}(y)$ et donc $y \in V$ d'après $(\mathrm{V_{II}})$, ce qui montre que $O \subset V$.
  On a donc $x \in O \subset V$, montrons maintenant que $O \in \mathcal{O}$:
  Soit $y \in O$ alors $V \in \mathcal{V}(y)$ et donc d'après $(\mathrm{V_V})$:
  $\exists W \in \mathcal{V}(y)$, $z \in W \Rightarrow V \in \mathcal{V}(z)$.
  Les éléments de W respectent donc la condition d'appartenance à O : $W \subset O$.
  On a ainsi $W \in \mathcal{V}(y)$ et $W \subset O$ et donc d'après $(\mathrm{V_{IV}})$ $O \in \mathcal{V}(y)$.
  On a montré que $\forall y \in O$, $O \in \mathcal{V}(y)$, donc $O \in \mathcal{O}$.
  On a donc $x \in O \subset V$ avec $O \in \mathcal{O}$, ce qui signifie que V est un voisinage pour la topologie construite.
- Soit $x \in E$. Montrons que les voisinages de x pour la topologie construite sont des éléments de $\mathcal{V}(x)$:
  Soit V un voisinage de x pour la topologie, donc $\exists O \in \mathcal{O}$ tel que $x \in O \subset V$.
  Par définition de $\mathcal{O}$, comme $x \in O$, on a que $O \in \mathcal{V}(x)$.
  D'après $(\mathrm{V_{IV}})$ on obtient finalement que $V \in \mathcal{V}(x)$

■