# Sur le problème de la tétration infinie ou *infinite power tower*

Jean-Baptiste Campesato

15 août 2010

Lors d'un quizz mathématique j'ai proposé la question suivante : que vaut $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}$ ? La réponse est 2, et n'est pas très difficile à obtenir : une démonstration est disponible à l'annexe A. Cependant, on m'a demandé si ce résultat se généralisait pour d'autres réels que $\sqrt{2}$, et là, le problème se corse un peu.
Le présent document propose donc de déterminer les réels $x$ tels que $x^{x^{x^{\cdots}}}$ soit défini, et le cas échéant d'essayer d'en donner la valeur.
Il fait suite à une démonstration que j'ai proposée sur le site http://epik.scientifik.fr.

# 1 Introduction

## 1.1 La nomenclature

Il semble qu'aucun nom ne soit vraiment donné à ce problème et surtout à l'objet $x^{x^{x^{\cdots}}}$. En effet, il y a presque un nom différent pour chaque article consacré à ce problème : *infinite tower power*, *infinite exponentials*, *infinite exponentiation*, *iterated exponentials*, *reiterated exponentials*, *surpuissance*, *hyperpuissance*, *nappe exponentielle*... Et d'autres encore !
Il y a cependant un nom que je préfère : le *problème de la tétration infinie*, dont je donne une explication ci-dessous :
On peut considérer l'addition comme l'opération la plus simple qui soit, il s'agit donc de la première opération. À l'aide de l'addition, on va construire la multiplication :
$x \times n = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ fois}}$. On obtient ainsi notre deuxième opération (qu'il faut quand même généraliser à $\mathbb{R}$).
De la même façon, on définit l'exponentiation : $x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$. C'est notre troisième opération.
En répétant le même procédé, on obtient une nouvelle opération : ${}^n x = x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}}$.
De nombreuses notations existent pour cette opération : ${}^n x$ (Hans Maurer, [14]), $a \uparrow\uparrow b$ (Donald Knuth, [12])...
Goodstein [9] a ainsi proposé le terme *tétration* (*tetra-* pour quatre et *-tion* pour itération) pour cette dernière opération. D'où le choix de nommer le problème étudié ici *tétration infinie*.

## 1.2 Histoire du problème

La première étude de ce problème semble remonter à Euler en 1777 [7] suite à un article de Nicolas de Condorcet [13]. Euler trouva exactement l'intervalle de convergence, mais forcément avec un certain manque de rigueur dû à l'époque.
De façon indépendante, Eisenstein propose ensuite une démonstration en 1844 [6], mais où il pense qu'il y a convergence pour tout $x \in ]0,1[$, ce qui on le verra, est faux. Au XIXe siècle, on retrouve entre autres, un article de Philipp Ludwig von Seidel en 1874 [16] qui corrige l'erreur de Eisenstein (toujours sans connaitre le papier d'Euler) et un papier de D. Gravé en 1898 [10] ayant pour but de formaliser la démonstration d'Euler.

# 2 L'étude du problème de la tétration infinie

## 2.1 Formalisation

Avant toute chose, voici une petite remarque qu'il n'est peut être pas inutile de rappeller :
$x^{x^{x^x}} = x^{\left(x^{\left(x^x\right)}\right)} \neq ((x^x)^x)^x = x^{xxx}$.
Attention, l'exponentiation n'est pas une opération associative !

Nous cherchons les réels $x$ tels que $x^{x^{x^{\cdots}}}$ soit défini, il s'agit donc d'étudier la suite $\begin{cases} x_0 = x \\ x_{n+1} = x^{x_n} & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$ en faisant varier $x$ dans $\mathbb{R}$ afin de trouver pour quelles valeurs de $x$ elle converge.
Lorsque la suite converge nous nous attarderons sur sa limite, qui est la valeur $x^{x^{x^{\cdots}}}$.

## 2.2 Le résultat

Pour les impatients, voici le résultat :

**Théorème**

La tétration infinie $x^{x^{x^{\cdots}}}$ est définie si et seulement si $x \in \left[e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}\right]$ et dans ce cas on a :

$x^{x^{x^{\cdots}}} = \varphi^{-1}(x)$ où $\varphi$ est la bijection $\varphi : \begin{array}{ccc} [e^{-1}, e] & \longrightarrow & \left[e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}\right] \\ t & \longmapsto & t^{\frac{1}{t}} = e^{\frac{\ln(t)}{t}} \end{array}$.

Ce qui peut se réécrire : $x^{x^{x^{\cdots}}} = \displaystyle\sum_{k \geq 1} \frac{k^{k-1}}{k!} (\ln x)^{k-1}$.

**Corollaire**

Soit $y \in [e^{-1}, e]$ et $x = y^{\frac{1}{y}}$. Alors, on a $x^{x^{x^{\cdots}}} = y$.

## 2.3 Présentation de l'étude

Dans tout ce qui suit, on note $f : t \mapsto x^t$, afin de pouvoir écrire plus simplement $x_{n+1} = f(x_n)$.
De plus nous pouvons d'ores et déjà éliminer les $x$ négatifs ou nul, en effet, dans ce cas notre suite n'est même pas définie.
Nous nous bornerons donc à l'étude de la suite lorsque $x > 0$.

J'ai ici fait le choix de simplement appliquer le plan d'étude usuel d'une suite récurrente de la forme $x_{n+1} = f(x_n)$, rappellé à l'annexe B. Le premier avantage d'une telle méthode est que l'on a pas besoin de prérequis ; on ne part pas du résultat pour le démontrer, mais on effectue un vrai travail de recherche dans le but d'obtenir ce résultat. Ensuite, le second avantage de cette méthode est que l'on ne fait appel qu'à des outils de L1, on obtient donc une étude facile à comprendre, bien qu'un peu technique. Le principal désavantage est qu'une telle démonstration peut devenir un peu longue et très calculatoire : il faut donc bien tout rédiger, tout garder en tête et bien vérifier ses résultats au fur et à mesure afin d'éviter que toute une partie de la démonstration soit fausse à cause d'une erreur.
Parmi les autres méthodes, on trouve la démonstration de Knoebel [11] qui utilise le théorème des fonctions implicites. Ou encore les démonstrations de D. F. Barrow [2] et de M. C. Mitchelmore [15] qui sont plus visuelles. Celle de Joel Anderson [1], plus récente, réalise une étude avec la même philosophie que le présent document mais est quand même différente (par exemple nous nous passerons ici de son lemme 4.3 qui permet de trouver la borne $e^{-e}$ en étudiant les couples $(y, z)$ que nous trouverons dans le cas $x \in ]0, 1[$, mais nous utiliserons plutôt l'étude de $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}k}$ ce qui permet d'obtenir, à mon avis, une démonstration bien plus simple).

## 2.4 L'étude

### 2.4.1 Recherche des points fixes

Recherchons d'abord les éventuelles limites en étudiant les points fixes de $f$ :
Supposons que la suite converge vers $l$, alors par continuité de la fonction $f$, on a : $l = f(l) = x^l > 0$ et ainsi $x = l^{\frac{1}{l}}$.
On va donc étudier $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^{\frac{1}{t}} = e^{\frac{\ln(t)}{t}} \end{array}$ (voir le dernier graphique).
$g$ est dérivable sur son ensemble de définition et $g'(t) = \frac{1-\ln(t)}{t^2} e^{\frac{\ln(t)}{t}}$, d'après l'étude des signes de $g'$, le maximum de $g$ est $e^{\frac{1}{e}}$ atteint en $e$. Et donc la suite ne peut pas converger lorsque $x > e^{\frac{1}{e}}$.

Dès maintenant on va remarquer que $f$ est décroissante lorsque $x \in ]0,1[$ (car $c < 1, a < b \Rightarrow c^a > c^b$ (1)) et croissante lorsque $x > 1$ (car $c > 1, a < b \Rightarrow c^a < c^b$ (2)), on va donc distinguer ces deux cas :

### 2.4.2 Le cas $x \geq 1$

Lorsque $x > 1$ on se convainc d'abord que $\{t, t > 1\}$ est bien stable par $f$ puis que la suite $(x_n)_n$ est croissante (On peut soit réaliser une récurrence à l'aide de (2) ou directement remarquer que comme $f$ est croissante, il suffit de comparer les deux premiers termes).
Ensuite si $x \in ]1, e^{\frac{1}{e}}]$, on montre par récurrence que la suite est majorée par $e$ (l'idée découle du fait que l'on sait que le maximum de $g$ est atteint en $e$, $e$ est donc la plus grande limite possible, et comme la suite est ici croissante elle ne peut pas dépasser son éventuelle limite) :
L'initialisation est directe : $x_0 = x \leq e^{\frac{1}{e}} < e$. Pour l'hérédité on suppose qu'il existe un certain rang $n \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $x_n < e$. Alors comme $x \leq e^{\frac{1}{e}}$, on a $x_{n+1} = x^{x_n} \leq e^{\frac{x_n}{e}}$ et ensuite, en appliquant (2) avec l'hypothèse de récurrence $x_n \leq e$ et avec $e^{\frac{1}{e}} > 1$, il vient $e^{\frac{x_n}{e}} \leq e^{\frac{e}{e}} = e$ et donc $x_{n+1} \leq e^{\frac{x_n}{e}} \leq e$, ce qui clôt la récurrence.
Ainsi pour $x \in \left]1, e^{\frac{1}{e}}\right]$ la suite est croissante et majorée, elle converge donc. Il est de plus évident que si $x = 1$ alors la suite converge encore.

Un petit récapitulatif de ce que l'on a déjà montré : il y a convergence si $x \in \left[1, e^{\frac{1}{e}}\right]$ et divergence si $x > e^{\frac{1}{e}}$. Il reste à étudier le cas $x \in ]0,1[$.

### 2.4.3 Le cas $x < 1$

On peut facilement se convaincre que $]0,1[$ est stable par $f$, et donc nos études se borneront à celui-ci (et à son adhérence). On a de plus sur cet intervalle $x_0 < x_1 > x_2 < x_3 > x_4 < \dots$ (soit réaliser une récurrence en utilisant (1) pour l'hérédité, soit directement reconnaitre qu'il s'agit du cas où $f$ est décroissante et alors étudier les premiers termes). Il faut alors étudier les deux suites extraites $(x_{2n})_n$ et $(x_{2n+1})_n$ qui sont respectivement décroissante et croissante : on sait que la suite $(x_n)_n$converge si et seulement si $(x_{2n})_n$ et $(x_{2n+1})_n$ convergent et ont même limites.
Une récurrence permet de démontrer que l'on a les encadrements $0 < x_{2n+1} < x_{2n} < 1$ (appliquer deux fois (1) pour l'hérédité) : ces deux suites extraites sont donc strictement monotones et bornées, elles sont donc convergentes. Notons $l_1 = \lim\limits_{n\infty} x_{2n}$ et $l_2 = \lim\limits_{n\infty} x_{2n+1}$, d'après l'encadrement précédent on a déjà $0 \leq l_2 \leq l_1 \leq 1$. Puis nous savons que la suite converge si et seulement si $l_1 = l_2$.

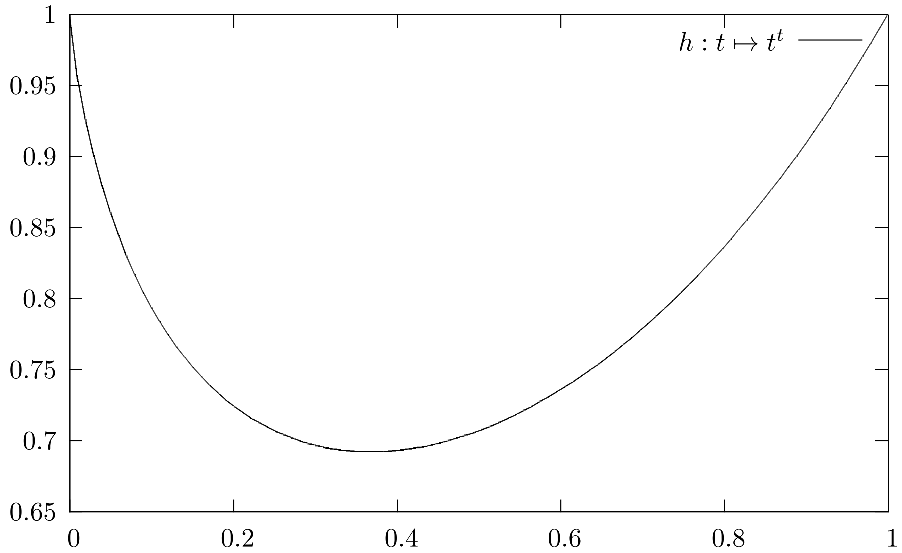
À partir de la, on devrait étudier $f \circ f$ et $f \circ f - Id$, il s'agit du réflexe à avoir usuellement, mais ici, cela peut s'avérer très fastidieux et très calculatoire. C'est le chemin emprunté par Gravé [10], par Vosper [17], par Creutz et Sternheimer [4] et par De Villiers et Robinson [5], avec à chaque fois différentes méthodes pour tenter de simplifier l'étude de $f \circ f$. On va ici utiliser une astuce, qui cependant se ramène aussi indirectement à l'étude de $f \circ f - Id$ : on va en effet obtenir le système d'équation suivant $\left\{ \begin{array}{ccc} l_2 & = & x^{l_1} \\ l_1 & = & x^{l_2} \end{array} \right.$ qui implique que $l_1 = x^{x^{l_1}} = f \circ f(l_1)$ :

Comme $x_{2n+1} = x^{x_{2n}}$ et $x_{2n+2} = x^{x_{2n+1}}$, par continuité et en passant à la limite, on a $\begin{cases} l_2 & = & x^{l_1} \\ l_1 & = & x^{l_2} \end{cases} \Leftrightarrow l_1^{\frac{1}{l_2}} = x = l_2^{\frac{1}{l_1}} \Leftrightarrow l_1^{l_1} = l_2^{l_2} = x^{l_1 l_2}$.
L'idée va être ici d'utiliser des arguments de l'étude de l'équation $z^y = y^z$ (en effet : si on pose $l_1 = \frac{1}{z}$ et $l_2 = \frac{1}{y}$, alors $l_1^{l_1} = l_2^{l_2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{z}} = \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{y}} \Leftrightarrow z^y = y^z$), étude qui remonte à une correspondance entre DANIEL BERNOUILLI et CHRISTIAN GOLDBACH : le premier exposa le problème au second dans une lettre datée de du 29 juin 1728 [3] auquel GOLDBACH a répondu six mois plus tard [8], solution dont je vais utiliser les arguments. Remarquons que cette solution a été retrouvée plus tard par de nombreux mathématiciens (dont EULER). De nombreux articles traitent de l'équation $y^z = z^y$, voir les deux bibliographies proposées en fin de document.

Revenons-en à notre démonstration :
Comme on sait que les limites vérifient $l_1^{l_1} = l_2^{l_2}$ avec $l_1, l_2 \in [0,1]$, pour rechercher sous quelles conditions elles sont différentes, on va étudier l'équation : $y^y = z^z$ avec $y, z \in [0,1]$ et $y \neq z$ ($z < y$ pour fixer les idées). Supposons que ce problème admette une solution $(y, z)$, on peut alors écrire $z = y^c$ avec un certain $c \in ]0,1[$, et ainsi $y^y = y^{cz} \Rightarrow y = cz = cy^c$. On obtient alors, en écrivant $c = 1 - \frac{1}{k}$ $(k > 1)$, $y = c^{\frac{1}{1-c}} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k$ et $z = c^{\frac{c}{1-c}} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1}$.
Réciproquement, on vérifie qu'il s'agit bien de solutions de notre équation.

D'après l'étude que l'on vient de faire, si $l_1 \neq l_2$ (et on sait même $l_2 < l_1$), il existe un réel $k > 1$ tel que $l_1 = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k$ et $l_2 = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1}$, on a alors $x = l_1^{\frac{1}{l_2}}$, et :
$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}k} = x \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\ln l_1}{l_2}\right)}{\mathrm{d}k} = \frac{\frac{l_2}{l_1}\frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}k} - \frac{\mathrm{d}l_2}{\mathrm{d}k}\ln l_1}{l_2^2} = \frac{kx}{l_2}\left(\frac{1}{k(k-1)} - \left(\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)^2\right)$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz va nous permettre d'étudier le signe de cette dérivée en nous évitant de longs calculs : $\frac{1}{k(k-1)} - \left(\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)^2 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(u+k-1)^2} - \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u+k-1}\right)^2 > 0$.
Ainsi $x : k \mapsto x(k)$ est strictement croissante et par continuité $\lim\limits_{k \to +\infty} x(k) = e^{-e}$ (sans jamais l'atteindre, du fait de la stricte croissance).
Il s'ensuit que si $x \geq e^{-e}$ (avec égalité car $x$ n'atteint pas sa limite), alors on ne peut avoir $l_1^{l_1} = l_2^{l_2}$ avec $l_1 \neq l_2$ et on a donc forcément $l_1 = l_2$, ainsi $(x_n)_n$ converge. Il y a donc aussi convergence sur $[e^{-e}, 1[$.

Il reste à traiter le cas de l'intervalle $]0, e^{-e}[$ :
Si $x \in ]0, e^{-e}[$, le travail précédent permet d'affirmer que l'on peut trouver deux réels $y, z \in ]0,1[$ avec $z < y$ tels que $x^{yz} = y^y = z^z \Leftrightarrow \begin{cases} z & = & x^y \\ y & = & x^z \end{cases}$. De plus l'étude de la fonction $h : \begin{array}{ccc} ]0,1[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^t \end{array}$ permet de remarquer que $0 < z < e^{-1} < y < 1$ :
$h$ est dérivable sur son ensemble de définition et $h'(t) = t^t(1 + \ln t)$, une étude de signe permet de remarquer que $h$ est strictement décroissante sur $]0, e^{-1}[$ et strictement croissante sur $]e^{-1}, 1[$ et atteint son minimum $e^{-\frac{1}{e}}$ en $e^{-1}$.

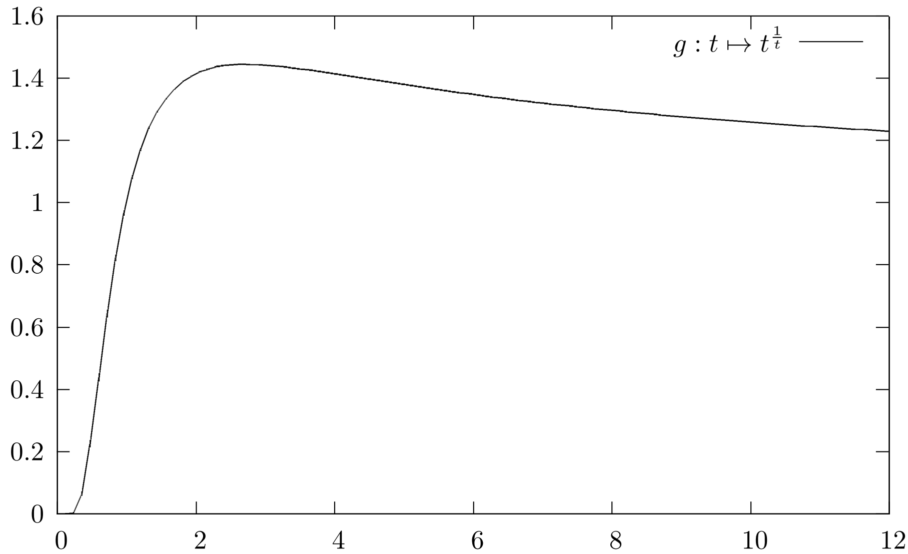



Puis nous avons forcément $x < z$ : sinon, si on avait $z \leq x$, on aurait $x = z^{\frac{1}{y}} \leq x^{\frac{1}{y}} < x$ (car $\frac{1}{d} > 1$), ce qui est impossible. On a aussi $y = x^z < x^x$.
Au final, on a : $0 < x < z < \frac{1}{e} < y < x^x < 1$.
Une récurrence donne : $0 < x_{2n+1} < z < \frac{1}{e} < y < x_{2n} < 1$, et donc en passant à la limite : $0 \leq l_2 \leq z < \frac{1}{e} < y \leq l_1 \leq 1 \Rightarrow l_2 < l_1$. Donc si $x \in ]0, e^{-e}[$, il y a divergence de la suite.

Nous avons ainsi obtenu que la suite $(x_n)_n$ était convergente si et seulement si $x \in \left[e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}\right]$.
Ce qui met fin à la première partie de l'étude qui consistait à chercher les $x$ tels que la suite converge.
■

### 2.4.4 Étude de la limite en cas de convergence

Dans le cas de la convergence, intéressons nous à la valeur de la limite :
Déjà, l'étude de $g$ permet de remarquer sur si $x \in [e^{-e}, 1]$ (resp. $x = e^{\frac{1}{e}}$), alors il existe un unique réel $y$ tel que $x = y^{\frac{1}{y}}$, et on sait même que $y \in [e^{-1}, 1]$ (resp. $y = e$), ainsi dans ce cas $f$ admet un unique point fixe, et donc $x^{x^{x^{\cdots}}} = y$.
Cependant si $x \in \left]1, e^{\frac{1}{e}}\right[$, il existe $y_1 \in ]1, e[$ et $y_2 \in ]e, +\infty[$ tels que $x = y_1^{\frac{1}{y_1}} = y_2^{\frac{1}{y_2}}$, et donc $f$ admet deux points fixes, qui sont deux éventuelles limites. Mais nous avons aussi vu que dans ce cas la suite était majorée par $e$, et donc $x^{x^{x^{\cdots}}} \leq e$, ainsi $y_1$ convient.
Voici le graphique de $g$ :




Ainsi étant donné un $x \in \left[e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}\right]$, $x^{x^{\cdots}} = \varphi^{-1}(x)$, où $\varphi$ est la bijection $\varphi = g_{|[e^{-1},e]}$.
On sait donc que lorsque l'on a $x = y^{\frac{1}{y}}$ avec $y \in [e^{-1}, e]$, alors $x^{x^{x^{\cdots}}} = y$, c'est pour cela que

l'on avait $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2$.

On peut essayer d'obtenir une forme un peu plus explicite de la valeur de notre tétration infinie. Pour cela, il va falloir étudier l'inverse de la fonction $g : t \mapsto t^{\frac{1}{t}}$, ce problème est traité de façon plus approfondie dans de nombreux articles proposés dans les deux bibliographies à la fin du document.
Comme on sait qu'en cas de convergence $x^{x^{x^{\cdots}}}$ est solution de l'équation en $y$, $y = x^y$, le théorème d'inversion de Lagrange donne : $x^{x^{x^{\cdots}}} = \sum_{k\geq 1} \frac{k^{k-1}}{k!}(\ln x)^{k-1}$.
Remarquons que cette forme était déjà connue d'Eisenstein.

Voilà donc un résumé de notre étude : $x^{x^{x^{\cdots}}}$ est définie si et seulement si $x \in \left[e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}\right]$ et alors $x^{x^{x^{\cdots}}} = \left(g_{|[e^{-1},e]}\right)^{-1}(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{k^{k-1}}{k!}(\ln x)^{k-1}$.
Et donc, lorsque l'on écrit $x = y^{\frac{1}{y}}$ avec $y \in [e^{-1}, e]$, on a $x^{x^{x^{\cdots}}} = y$.

Ce qui met fin à l'étude. ■

# 3 Pour aller plus loin...

Des articles proposent d'élargir le cadre d'étude au nombres complexes et d'autres étudient le cas où $x$ varie : $a_1^{a_2^{a_3^{\cdots}}}$. Pour plus d'informations, je vous renvois au deux bibliographies à la fin du document.
Je ne peux que vous conseiller la lecture de [11] qui finit en présentant différents axes de recherches qui ont été empruntés.

# A Le cas de $\sqrt{2}$

Que vaut $t = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}$ ?

On étudie la suite $x_{n+1} = f(x_n)$ avec $f(x) = \sqrt{2}^x$ et $x_0 = \sqrt{2}$. Ainsi $t$ n'est rien d'autre que la limite de cette suite. On a ainsi par passage à la limite par continuité de $f$ : $t = \sqrt{2}^t$.
On étudie la fonction $t\log(\sqrt{2}) - \log(t)$, on remarque qu'elle n'a que deux racines, or 2 et 4 sont solutions évidentes. Puis la suite est majorée par 2 (considérer $x_n^2$, c'est plus grand que $x_n$, et par substitutions successives on obtient $x_n^2 = 2$, donc $x_n \leq 2$).
On retrouve donc que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2$, sans passer par l'étude du document (ie. appliquer le corollaire avec $y = 2$).

# B Plan d'étude d'une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Pour résoudre le problème, on n'a fait qu'appliquer le plan général pour l'étude des suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, que je rappelle ici. On vérifie de bien travailler sur des intervalles stables par $f$ (pour que l'étude de fonction rime à quelque chose : il serait dommage que notre suite quitte l'intervalle que l'on étudie) où $f$ est de monotonie constante, enfin on distingue le cas croissant du cas décroissant. Si $f$ est croissante (ici $x > 1$) alors on recherche les éventuels points fixes de $f$ qui pourraient être la limite recherchée, puis en étudiant les deux premiers termes de la suite on obtient sa monotonie (une récurrence simple permet de se convaincre que dans ce cas l'étude des deux premiers termes seuls suffit) et enfin on regarde son caractère minorée/majorée (par exemple : une suite croissante majorée est convergente). Si $f$ est décroissante (ici $x \in ]0,1[$) alors $u_{2n}$ et $u_{2n+1}$ sont monotones de monotonie opposée (ceci se démontre encore par une récurrence), ensuite l'étude de $f \circ f - Id$ permet d'obtenir les sens de variation de chacune des deux sous-suites et enfin on sait alors que la suite ne converge que si ces deux sous-suites sont convergentes et de même limite (pour la recherche des limites on peut appliquer le premier cas à $f \circ f$ croissante, étudier le caractère minorée/majorée).

# Références

[1] Joel Anderson. Interated exponentials. *The American Mathematical Monthly*, 111 :668–679, 10 2004.

[2] D. F. Barrow. Infinite exponentials. *The American Mathematical Monthly*, 43 :150–160, 03 1936.

[3] Daniel Bernouilli. Lettre à goldbach. *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIe siècle*, 2, 1843.

[4] Michael Creutz and R. M. Sternheimer. On the convergence of iterated exponentiation. *Fibonacci Quarterly*, 93 :341–347, 12 1980.

[5] J. M. De Villiers and P. N. Robinson. The interval of convergence and limiting functions of a hyperpower sequence. *The American Mathematical Monthly*, 93 :13–23, 01 1986.

[6] Ferdinand Gotthold Max Eisenstein. Entwicklung von $\alpha^{\alpha^{\alpha^{\cdots}}}$. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 28 :49–52, 1844.

[7] Leonhard Paul Euler. De formulis exponentialibus replicatis. *Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae*, 1 :38–60, 1777. Fait suite à un exposé donné à l'Académie de Saint Petersburg le 12 juin 1777. Suit l'article de Condorcet.

[8] Christian Goldbach. Lettre à bernouilli. *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIe siècle*, 2, 1843.

[9] R. L. Goodstein. Transfinite ordinals in recursive number theory. *The Journal of Symbolic Logic*, 12 :123–129, 12 1901.

[10] D. Gravé. Sur les expressions dites superpuissances. *Nouvelles annales de mathématiques 3è série*, 17 :80–91, 1898. .

[11] R. Arthur Knoebel. Exponentials reiterated. *The American Mathematical Monthly*, 88 :235–252, 04 1981.

[12] Donald E. Knuth. Mathematics and computer science : Coping with finiteness. *Science*, 194 :1235–1242, 12 1976.

[13] Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat marquis de Condorcet. Quelques séries infinies dont la somme peut être exprimée par des fonctions analytiques d'une forme particulière. *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 1 :34–37, 1777. Précède l'article d'Euler.

[14] Hans Maurer. Über die funktion $x^{\left[x^{\left[x^{\cdots}\right]}\right]}$ für ganzzahliges argument (abundanzen). *Mittheilungen der Mathematische Gesellschaft in Hamburg*, 4 :33–50, 1901.

[15] M. C. Mitchelmore. A matter of definition. *The American Mathematical Monthly*, 81 :643–647, Jun.-Jul. 1974.

[16] Philipp Ludwig von Seidel. Ueber die grenzwerthe eines unendlichen potenzausdruckes. *Abhandlungen der Mathematisch physikalischen Classe der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften*, 11 :1–10, 1874.

[17] A. G. Vosper. 2517. on note 2285 : Multiple exponentials. *The Mathematical Gazette*, 39 :141–143, 05 1955.

La page `http://ioannis.virtualcomposer2000.com/math/IERefs.html` et l'article [11] (qui est d'ailleurs très complet et va plus loin) contiennent une vaste bibliographie concernant le problème de la tétration infinie.