Mémoire de M2 : Cohomologie de de Rham

Jean-Baptiste Campesato

Sous la direction de M. Adam Parusiński

15 juin 2012

Formes différentielles : définition

Remarque

Nous ne considérons que des variétés différentielles C^∞, séparées et à base dénombrable.

Définition : forme différentielle

Une k-*forme différentielle* est une application

$$\omega : \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \Lambda^k(TM) \\ x & \longmapsto & \omega_x \end{array}$$ telle que pour tout $x \in M$,

$$\omega_x \in \Lambda^k(T_xM) \text{ où } \Lambda^k(TM) = \bigsqcup_{x \in M} \Lambda^k(T_xM).$$

Formes différentielles : définition

Remarque

Nous ne considérons que des variétés différentielles C^∞, séparées et à base dénombrable.

Définition : forme différentielle

Une k-*forme différentielle* est une application

$$\omega : \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \Lambda^k(TM) \\ x & \longmapsto & \omega_x \end{array}$$

telle que pour tout $x \in M$,

$$\omega_x \in \Lambda^k(T_x M) \text{ où } \Lambda^k(TM) = \bigsqcup_{x \in M} \Lambda^k(T_x M).$$

Formes différentielles : écriture locale

Proposition : écriture locale

Si ω est une k-forme différentielle sur M et si (U, φ) est une carte de M alors ω s'écrit de façon unique sur U :

$$\forall x \in U,\ \omega_x = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} a_{i_1,\ldots,i_k}(x)\, d\varphi_{i_1,x} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_k,x}$$

Remarque

La régularité des formes différentielles se lit dans les coefficients $a_{i_1,\ldots,i_k} : U \to \mathbb{R}$.

On note $\Omega^k(M)$ l'espace vectoriel des k-formes différentielles lisses sur M.

Formes différentielles : produit extérieur

Définition : produit extérieur

Si $\omega \in \Omega^k(M)$ et $\eta \in \Omega^l(M)$ on définit le produit extérieur $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+l}(M)$ par $(\omega \wedge \eta)_x = \omega_x \wedge \eta_x$.

Propositions

Soient $\omega, \omega' \in \Omega^k(M)$, $\eta, \eta' \in \Omega^l(M)$, $\theta \in \Omega^m(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

- $(\omega + \omega') \wedge \eta = \omega \wedge \eta + \omega' \wedge \eta$
- $\omega \wedge (\eta + \eta') = \omega \wedge \eta + \omega \wedge \eta'$
- $(\lambda\omega) \wedge \eta = \omega \wedge (\lambda\eta) = \lambda(\omega \wedge \eta)$
- $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$
- $\omega \wedge (\eta \wedge \theta) = (\omega \wedge \eta) \wedge \theta$

Formes différentielles : produit extérieur

Définition : produit extérieur

Si $\omega \in \Omega^k(M)$ et $\eta \in \Omega^l(M)$ on définit le produit extérieur $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+l}(M)$ par $(\omega \wedge \eta)_x = \omega_x \wedge \eta_x$.

Propositions

Soient $\omega, \omega' \in \Omega^k(M)$, $\eta, \eta' \in \Omega^l(M)$, $\theta \in \Omega^m(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

- $(\omega + \omega') \wedge \eta = \omega \wedge \eta + \omega' \wedge \eta$
- $\omega \wedge (\eta + \eta') = \omega \wedge \eta + \omega \wedge \eta'$
- $(\lambda\omega) \wedge \eta = \omega \wedge (\lambda\eta) = \lambda(\omega \wedge \eta)$
- $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\eta \wedge \omega$ $\qquad \Omega^*(M) = \bigoplus \Omega^n(M)$.
- $\omega \wedge (\eta \wedge \theta) = (\omega \wedge \eta) \wedge \theta$

Formes différentielles : différentielle extérieure

Proposition-définition : différentielle extérieure

Si M est une variété lisse, il existe une unique application linéaire $d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ telle que :

1. Si $\omega \in \Omega^k(M)$ alors $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$.
2. Sur $\Omega^0(M)$, d est la différentielle usuelle.
3. $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge (d\eta)$ (*antidérivation*).
4. $d \circ d = 0$

Remarque

On a ainsi muni $\Omega^*(M)$ d'une structure d'algèbre graduée différentielle associative et anticommutative.

Formes différentielles : différentielle extérieure

Proposition-définition : différentielle extérieure

Si M est une variété lisse, il existe une unique application linéaire $d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ telle que :

1. Si $\omega \in \Omega^k(M)$ alors $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$.
2. Sur $\Omega^0(M)$, d est la différentielle usuelle.
3. $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge (d\eta)$ (*antidérivation*).
4. $d \circ d = 0$

Remarque

On a ainsi muni $\Omega^*(M)$ d'une structure d'algèbre graduée différentielle associative et anticommutative.

Formes différentielles : image réciproque

Définition : image réciproque

Si $f : M \to N$ lisse et si $\omega \in \Omega^k(N)$ alors l'image réciproque de ω par f est $f^*\omega \in \Omega^k(M)$ définie par $(f^*\omega)_x = {}^tT_xf(\omega_{f(x)})$
ie $(f^*\omega)_x(v_1, \dots, v_k) = \omega_{f(x)}\left(T_xf(v_1), \dots, T_xf(v_p)\right)$ où $x \in M$.

Propositions

- $f^*(\omega + \eta) = f^*\omega + f^*\eta$
- $f^*(\lambda\omega) = \lambda f^*\omega$
- $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$
- $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
- $d \circ f^* = f^* \circ d$

Remarque

On obtient ainsi un foncteur contravariant Ω^* de la catégorie des variétés différentielles dans la catégorie des algèbres graduées associatives et anticommutatives.

Formes différentielles : image réciproque

Définition : image réciproque

Si $f : M \to N$ lisse et si $\omega \in \Omega^k(N)$ alors l'image réciproque de ω par f est $f^*\omega \in \Omega^k(M)$ définie par $(f^*\omega)_x = {}^tT_xf(\omega_{f(x)})$ *ie* $(f^*\omega)_x(v_1, \ldots, v_k) = \omega_{f(x)}(T_xf(v_1), \ldots, T_xf(v_p))$ où $x \in M$.

Propositions

- $f^*(\omega + \eta) = f^*\omega + f^*\eta$
- $f^*(\lambda\omega) = \lambda f^*\omega$
- $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$
- $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
- $d \circ f^* = f^* \circ d$

Remarque

On obtient ainsi un foncteur contravariant Ω^* de la catégorie des variétés différentielles dans la catégorie des algèbres graduées associatives et anticommutatives.

Cohomologie de de Rham : définition et premiers exemples

La cohomologie du complexe de cochaînes de de Rham

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d^1} \Omega^2(M) \xrightarrow{d^2} \cdots$$

est nommée *cohomologie de de Rham* :

Notation

Le n-*ème espace de cohomologie de de Rham de* M est l'espace vectoriel $H^n_{DR}(M) = Z^n(\Omega^*(M))/B^n(\Omega^*(M)) =$ $\ker d^n / \operatorname{im} d^{n-1} = \{n\text{-formes fermées}\}/\{n\text{-formes exactes}\}$.

Cohomologie de de Rham : définition et premiers exemples

Remarque

L'image réciproque commute avec d : c'est un morphisme de complexes de cochaînes et elle passe à la cohomologie.
En particulier, deux variétés différentielles difféomorphes ont même cohomologie.

Remarque

Le produit extérieur passe à la cohomologie : $H^*(M) = \oplus H^n(M)$.

Exemples

$H^0(M) \simeq \mathbb{R}^{\{\text{comp. connexes}\}}$

$k > \dim M \Rightarrow H^k(M) = 0$

$$H^k(\mathbb{R}) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$H^k(\mathbb{S}^1) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cohomologie de de Rham : invariance par homotopie

Théorème : invariance par homotopie

Soient $f, g : M \to N$ deux applications lisses différentiablement homotopes alors $f^* = g^* : H^*(N) \to H^*(M)$.

Théorème

- Toute application continue est continûment homotope à une application lisse.
- Deux applications lisses continûment homotopes sont différentiablement homotopes.

Corollaire

Deux variétés différentielles ayant même type d'homotopie ont même cohomologie.

Cohomologie de de Rham : invariance par homotopie

Théorème : invariance par homotopie

Soient $f, g : M \to N$ deux applications lisses différentiablement homotopes alors $f^* = g^* : H^*(N) \to H^*(M)$.

Théorème

- Toute application continue est continûment homotope à une application lisse.
- Deux applications lisses continûment homotopes sont différentiablement homotopes.

Corollaire

Deux variétés différentielles ayant même type d'homotopie ont même cohomologie.

Cohomologie de de Rham : invariance par homotopie

Applications

- $H^k(\text{Möbius}) \simeq H^k(\mathbb{S}^1) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $H^k(\mathbb{R}^n) \simeq H^k(\{\text{point}\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $\begin{cases} H^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \simeq & H^k(\mathbb{S}^{n-1}) \\ & \simeq & \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{si } k = 0 & (n = 1) \\ \mathbb{R} & \text{si } k = 0, n-1 & (n > 1) \\ 0 & \text{sinon} & \end{cases} \end{cases}$
- $n \neq m \Rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ ne sont pas homéomorphes.

Cohomologie de de Rham : suites de Mayer-Vietoris

Soient U et V deux ouverts d'une variété différentielle :

$$\begin{tikzcd} & U \cap V \arrow[dl, hook, "i_U"'] \arrow[dr, hook, "i_V"] & \\ U \arrow[dr, hook, "j_U"'] & & V \arrow[dl, hook', "j_V"] \\ & U \cup V & \end{tikzcd}$$

Suite exacte courte de Mayer-Vietoris

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \Omega^*(U \cup V) & \to & \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) & \to & \Omega^*(U \cap V) & \to & 0 \\ & \alpha : & \omega & \mapsto & (j_U^*\omega, j_V^*\omega) & & & & \\ & & & \beta : & (\omega, \eta) & \mapsto & i_U^*\omega - i_V^*\eta & & \end{array}$$

Cohomologie de de Rham : suites de Mayer-Vietoris

Suite exacte longue de Mayer-Vietoris

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(U\cap V) \xrightarrow{\delta^{n-1}} H^n(M) \xrightarrow{\alpha} H^n(U)\oplus H^n(V) \xrightarrow{\beta} H^n(U\cap V) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(M) \longrightarrow \cdots$$

Applications

$$H^k(\mathbb{S}^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad H^k(P^n\mathbb{C}) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 2k' \leqslant 2n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cohomologie de de Rham : suites de Mayer-Vietoris

Suite exacte longue de Mayer-Vietoris

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(U\cap V) \xrightarrow{\delta^{n-1}} H^n(M) \xrightarrow{\alpha} H^n(U)\oplus H^n(V) \xrightarrow{\beta} H^n(U\cap V) \xrightarrow{\delta^{n}} H^{n+1}(M) \longrightarrow \cdots$$

Applications

$$H^k(\mathbb{S}^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad H^k(P^n\mathbb{C}) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 2k' \leqslant 2n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cohomologie de de Rham : recouvrements simples

Définition

Un recouvrement ouvert est dit simple si toutes les intersections finies non vides sont contractiles.

Théorème

Tout recouvrement ouvert d'une variété différentielle admet un raffinement simple.

Application

Si M est une variété différentielle admettant un recouvrement simple fini alors $H^*(M)$ est de dimension finie.
Par exemple si M est compacte.

Cohomologie de de Rham : recouvrements simples

Définition

Un recouvrement ouvert est dit simple si toutes les intersections finies non vides sont contractiles.

Théorème

Tout recouvrement ouvert d'une variété différentielle admet un raffinement simple.

Application

Si M est une variété différentielle admettant un recouvrement simple fini alors $H^*(M)$ est de dimension finie.
Par exemple si M est compacte.

Cohomologie de de Rham : recouvrements simples

Définition

Un recouvrement ouvert est dit simple si toutes les intersections finies non vides sont contractiles.

Théorème

Tout recouvrement ouvert d'une variété différentielle admet un raffinement simple.

Application

Si M est une variété différentielle admettant un recouvrement simple fini alors $H^*(M)$ est de dimension finie.
Par exemple si M est compacte.

Cohomologie de de Rham : dualité de Poincaré

Soit M une variété différentielle orientée, alors l'application linéaire
$$\begin{array}{rccc} \mathcal{D}_M^k : & H^k(M) & \longrightarrow & H_c^{n-k}(M)^* \\ & [\omega] & \longmapsto & \left([\eta] \mapsto \int_M \omega \wedge \eta\right) \end{array}$$ est bien définie.

Théorème : dualité de Poincaré

L'application D_M^k est un isomorphisme : $H^k(M) \simeq H_c^{n-k}(M)^*$.

Remarque

Généralement nous n'avons pas $H_c^k(M) \simeq H^{n-k}(M)^*$.

Cohomologie de de Rham : dualité de Poincaré

Soit M une variété différentielle orientée, alors l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} & H^k(M) & \longrightarrow & H_c^{n-k}(M)^* \\ \mathcal{D}_M^k : & [\omega] & \longmapsto & \left([\eta] \mapsto \int_M \omega \wedge \eta\right) \end{array}$$

est bien définie.

Théorème : dualité de Poincaré

L'application D_M^k est un isomorphisme : $H^k(M) \simeq H_c^{n-k}(M)^*$.

Remarque

Généralement nous n'avons pas $H_c^k(M) \simeq H^{n-k}(M)^*$.

Cohomologie de de Rham : dualité de Poincaré

Applications

- $H_c^k(M \times \mathbb{R}) \simeq H_c^{k-1}(M)$ (lemme de Poincaré à support compact).
- Soit M une variété connexe, orientée et de dimension n alors $H^n(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } M \text{ est compacte} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $H^*(P^n\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}[u]/(u^{n+1})$ où $\deg u = 2$.
- Si M est une variété différentielle connexe et orientée de dimension n alors $\begin{array}{ccc} H_c^n(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ [\omega] & \longmapsto & \int_M \omega \end{array}$ est un isomorphisme linéaire.
- Si M compacte, connexe et orientée : $\int_M \omega = 0 \Leftrightarrow \omega$ exacte.

Cohomologie de de Rham : théorèmes de Künneth

Soient M et N deux variétés différentielles. L'application bilinéaire

$$\begin{array}{ccc} \Omega^*(M) \times \Omega^*(N) & \longrightarrow & \Omega^*(M \times N) \\ (\omega, \eta) & \longmapsto & \pi_M^*\omega \wedge \pi_N^*\eta \end{array}$$ induit des morphismes

d'algèbres graduées $\kappa : H^*(M) \otimes_{\mathbb{R}} H^*(N) \to H^*(M \times N)$ et $\kappa_c : H_c^*(M) \otimes_{\mathbb{R}} H_c^*(N) \to H_c^*(M \times N)$.

Théorèmes de Künneth

- κ_c est un isomorphisme.
- κ est un isomorphisme dès qu'une cohomologie est de dimension finie.

Application

$$H^k(\text{tore}) \simeq H^k(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \simeq \begin{cases} 2 & \text{si } k=1 \\ 1 & \text{si } k = 0, 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Cohomologie de de Rham : théorèmes de Künneth

Soient M et N deux variétés différentielles. L'application bilinéaire
$$\begin{array}{ccc} \Omega^*(M) \times \Omega^*(N) & \longrightarrow & \Omega^*(M \times N) \\ (\omega, \eta) & \longmapsto & \pi_M^* \omega \wedge \pi_N^* \eta \end{array}$$
induit des morphismes

d'algèbres graduées $\kappa : H^*(M) \otimes_{\mathbb{R}} H^*(N) \to H^*(M \times N)$ et $\kappa_c : H_c^*(M) \otimes_{\mathbb{R}} H_c^*(N) \to H_c^*(M \times N)$.

Théorèmes de Künneth

- κ_c est un isomorphisme.
- κ est un isomorphisme dès qu'une cohomologie est de dimension finie.

Application

$$H^k(\text{tore}) \simeq H^k(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \simeq \begin{cases} 2 & \text{si } k=1 \\ 1 & \text{si } k = 0, 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Cohomologie de de Rham : applications

Application : le théorème du point fixe de Brouwer

Toute application continue $f : D^n \to D^n$ admet un point fixe.

Application : le théorème de la boule chevelue

La sphère $\mathbb{S}^n$ admet un champ de vecteurs partout non nul si et seulement si n est impair.

Schéma de preuve de la dualité de Poincaré

Notations

Dans toute la suite, si $\mathcal{B}$ est une base dénombrable stable par intersections finies, on note alors $\mathcal{B}_f$ l'ensemble des ouverts de M qui s'écrivent comme union finie d'ouverts de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_s$ l'ensemble des ouverts de M qui s'écrivent comme union disjointe au plus dénombrable d'ouverts de $\mathcal{B}$.

Remarque

On vérifie que $\mathcal{B}_f$ et $\mathcal{B}_s$ sont encore des bases dénombrables stables par intersections finies.

Remarque

$((\mathcal{B}_f)_s)_f$ est l'ensemble de tous les ouverts de M.

Schéma de preuve de la dualité de Poincaré

Notations

Dans toute la suite, si $\mathcal{B}$ est une base dénombrable stable par intersections finies, on note alors $\mathcal{B}_f$ l'ensemble des ouverts de M qui s'écrivent comme union finie d'ouverts de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_s$ l'ensemble des ouverts de M qui s'écrivent comme union disjointe au plus dénombrable d'ouverts de $\mathcal{B}$.

Remarque

On vérifie que $\mathcal{B}_f$ et $\mathcal{B}_s$ sont encore des bases dénombrables stables par intersections finies.

Remarque

$((\mathcal{B}_f)_s)_f$ est l'ensemble de tous les ouverts de M.

Schéma de preuve de la dualité de Poincaré

Notations

Dans toute la suite, si $\mathcal{B}$ est une base dénombrable stable par intersections finies, on note alors $\mathcal{B}_f$ l'ensemble des ouverts de M qui s'écrivent comme union finie d'ouverts de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_s$ l'ensemble des ouverts de M qui s'écrivent comme union disjointe au plus dénombrable d'ouverts de $\mathcal{B}$.

Remarque

On vérifie que $\mathcal{B}_f$ et $\mathcal{B}_s$ sont encore des bases dénombrables stables par intersections finies.

Remarque

$((\mathcal{B}_f)_s)_f$ est l'ensemble de tous les ouverts de M.

Schéma de preuve de la dualité de Poincaré

On vérifie que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "(-1)^k\delta^{k-1}"] & H^k(U\cup V) \arrow[r, "\alpha^k"] \arrow[d, "\mathcal{D}^k_{U\cup V}"] & H^k(U)\oplus H^k(V) \arrow[r, "\beta^k"] \arrow[d, "\mathcal{D}^k_U\oplus\mathcal{D}^k_V"] & H^k(U\cap V) \arrow[r, "(-1)^{k+1}\delta^k"] \arrow[d, "\mathcal{D}^k_{U\cap V}"] & H^{k+1}(U\cup V) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{D}^{k+1}_{U\cup V}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_c^{n-k}(U\cup V)^* \arrow[r, "{}^t\alpha_{n-k}"'] & H_c^{n-k}(U)^*\oplus H_c^{n-k}(V)^* \arrow[r, "{}^t\beta_{n-k}"'] & H_c^{n-k}(U\cap V)^* \arrow[r, "{}^t\delta_c^{n-k-1}"'] & H_c^{n-k-1}(U\cup V)^* \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Remarque

Ce diagramme permet de conclure si on suppose que M admet un recouvrement simple fini.

Lemme

Si la dualité de Poincaré est vraie pour les ouverts de $\mathcal{B}$ alors elle est vraie pour ceux de $\mathcal{B}_f$.

Schéma de preuve de la dualité de Poincaré

On vérifie que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "(-1)^k\delta^{k-1}"] & H^k(U\cup V) \arrow[r, "\alpha^k"] \arrow[d, "\mathcal{D}^k_{U\cup V}"] & H^k(U)\oplus H^k(V) \arrow[r, "\beta^k"] \arrow[d, "\mathcal{D}^k_U\oplus\mathcal{D}^k_V"] & H^k(U\cap V) \arrow[r, "(-1)^{k+1}\delta^k"] \arrow[d, "\mathcal{D}^k_{U\cap V}"] & H^{k+1}(U\cup V) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{D}^{k+1}_{U\cup V}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_c^{n-k}(U\cup V)^* \arrow[r, "{}^t\alpha_{n-k}"'] & H_c^{n-k}(U)^*\oplus H_c^{n-k}(V)^* \arrow[r, "{}^t\beta_{n-k}"'] & H_c^{n-k}(U\cap V)^* \arrow[r, "{}^t\delta_c^{n-k-1}"'] & H_c^{n-k-1}(U\cup V)^* \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Remarque

Ce diagramme permet de conclure si on suppose que M admet un recouvrement simple fini.

Lemme

Si la dualité de Poincaré est vraie pour les ouverts de $\mathcal{B}$ alors elle est vraie pour ceux de $\mathcal{B}_f$.

Schéma de preuve de la dualité de Poincaré

On vérifie que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "(-1)^k\delta^{k-1}"] & H^k(U\cup V) \arrow[r, "\alpha^k"] \arrow[d, "\mathcal{D}^k_{U\cup V}"] & H^k(U)\oplus H^k(V) \arrow[r, "\beta^k"] \arrow[d, "\mathcal{D}^k_U\oplus\mathcal{D}^k_V"] & H^k(U\cap V) \arrow[r, "(-1)^{k+1}\delta^k"] \arrow[d, "\mathcal{D}^k_{U\cap V}"] & H^{k+1}(U\cup V) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{D}^{k+1}_{U\cup V}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_c^{n-k}(U\cup V)^* \arrow[r, "{}^t\alpha_{n-k}"'] & H_c^{n-k}(U)^*\oplus H_c^{n-k}(V)^* \arrow[r, "{}^t\beta_{n-k}"'] & H_c^{n-k}(U\cap V)^* \arrow[r, "{}^t\delta_c^{n-k-1}"'] & H_c^{n-k-1}(U\cup V)^* \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Remarque

Ce diagramme permet de conclure si on suppose que M admet un recouvrement simple fini.

Lemme

Si la dualité de Poincaré est vraie pour les ouverts de $\mathcal{B}$ alors elle est vraie pour ceux de $\mathcal{B}_f$.

Schéma de preuve de la dualité de Poincaré

Soit $O \in \mathcal{B}_s$ alors $O = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} O_i$ avec $O_i \in \mathcal{B}$.

Nous avons des isomorphismes $H^k(O) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=0}^{\infty} H^k(O_i)$ et

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} H_c^{n-k}(O_i) \xrightarrow{\sim} H_c^{n-k}(O) \Rightarrow H_c^{n-k}(O)^* \xrightarrow{\sim} \prod_{i=0}^{\infty} H_c^{n-k}(O_i)^*.$$

$$\begin{tikzcd}
H^k(O) \arrow[r, "\mathcal{D}_O^k"] \arrow[d, "\sim"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_c^{n-k}(O)^* \arrow[d, "\sim"] \\
\prod_{i=0}^{\infty} H^k(O_i) \arrow[r, "\sim", "\Pi_i \mathcal{D}_{O_i}^k"'] & \prod_{i=0}^{\infty} H_c^{n-k}(O_i)^*
\end{tikzcd}$$

Donc si la dualité de Poincaré est vraie pour les ouverts de $\mathcal{B}$, c'est aussi le cas pour ceux de $\mathcal{B}_s$.

Schéma de preuve de la dualité de Poincaré

Soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable stable par intersections finies dont les ouverts sont difféomorphes à des ouverts de $\mathbb{R}^{\dim M}$.

Lemme

La dualité de Poincaré est vraie pour les ouverts de $\mathcal{B}$.

Ainsi d'après ce qui précède, la dualité de Poincaré est vraie pour les ouverts de $((B_f)_s)_f$ et donc pour M. $\blacksquare$

Schéma de preuve de la dualité de Poincaré

Soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable stable par intersections finies dont les ouverts sont difféomorphes à des ouverts de $\mathbb{R}^{\dim M}$.

Lemme

La dualité de Poincaré est vraie pour les ouverts de $\mathcal{B}$.

Ainsi d'après ce qui précède, la dualité de Poincaré est vraie pour les ouverts de $((B_f)_s)_f$ et donc pour M.

$\blacksquare$

Théorème de de Rham : définition

Soient M une variété différentielle, $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de M et $\mathscr{F}$ un préfaisceau sur M.

Notation : l'ensemble des p-simplexes du nerf de $\mathcal{U}$.

$$S_p(\mathcal{U}) = \{(\sigma_0, \ldots, \sigma_p) \in I^{p+1},\ U_{|\sigma|} = U_{\sigma_0} \cap \ldots \cap U_{\sigma_p} \neq \varnothing\}$$

Définition : complexe de Čech

Le complexe de Čech relativement à $\mathcal{U}$ et à coefficients dans $\mathscr{F}$ est donné par $C^0(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\delta} \cdots$ où

$$C^p(\mathcal{U}, \mathscr{F}) = \prod_{\sigma \in S_p(\mathcal{U})} \mathscr{F}(U_{|\sigma|}) \text{ et } (\delta\omega)_\sigma = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \rho_{U_{|\sigma|}}^{U_{|\partial_i \sigma|}} (\omega_{\partial_i \sigma})$$

avec $\omega \in C^p(\mathcal{U}, \mathscr{F})$, $\sigma \in S_{p+1}(\mathcal{U})$ et $\partial_i \sigma = (\sigma_0, \ldots, \widehat{\sigma_i}, \ldots, \sigma_{p+1})$ le i-ème bord partiel de σ.

Théorème de de Rham : complexe de Čech-de Rham

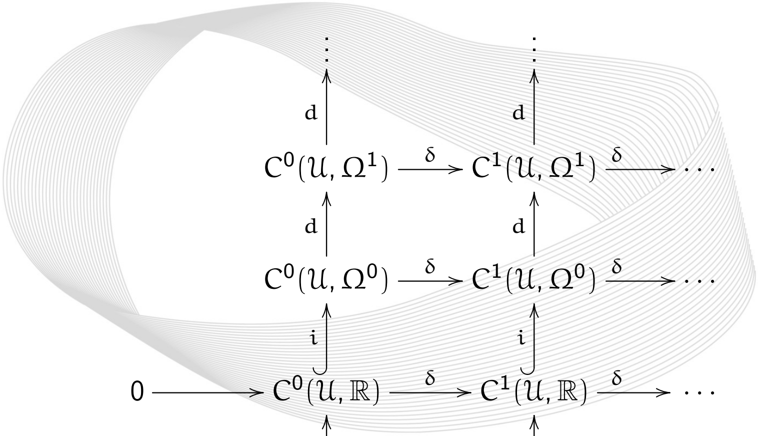
$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \\
C^0(\mathcal{U},\Omega^1) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & C^1(\mathcal{U},\Omega^1) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & \cdots \\
C^0(\mathcal{U},\Omega^0) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & C^1(\mathcal{U},\Omega^0) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

On considère le foncteur $\Sigma : K(A)^{*,*} \to K(A)^*$ donné par $\Sigma(C^{*,*})^k = \bigoplus_{i+j=k} C^{i,j}$ ainsi que $D^k : C^k \to C^{k+1}$ qui à $x \in C^{i,j}$ associe $D^k(x) = \partial^{i,j}(x) + (-1)^j \delta^{i,j}(x) \in C^{i,j+1} \oplus C^{i+1,j}$ et qui conserve l'action des morphismes sur chaque $C^{i,j}$

Théorème de de Rham : complexe de Čech-de Rham

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & \Omega^1(M) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "r"] & C^0(\mathcal{U}, \Omega^1) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & C^1(\mathcal{U}, \Omega^1) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Omega^0(M) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "r"] & C^0(\mathcal{U}, \Omega^0) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & C^1(\mathcal{U}, \Omega^0) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & \cdots \\
 & 0 \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}
$$

Théorème de de Rham : complexe de Čech-de Rham



$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \\
 & C^0(\mathcal{U},\Omega^1) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & C^1(\mathcal{U},\Omega^1) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & \cdots \\
 & C^0(\mathcal{U},\Omega^0) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & C^1(\mathcal{U},\Omega^0) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & C^0(\mathcal{U},\mathbb{R}) \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\delta"] & C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\delta"] & \cdots \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Théorème de de Rham : complexe de Čech-de Rham

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & \Omega^1(M) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "r"] & C^0(\mathcal{U}, \Omega^1) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & C^1(\mathcal{U}, \Omega^1) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Omega^0(M) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "r"] & C^0(\mathcal{U}, \Omega^0) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & C^1(\mathcal{U}, \Omega^0) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & \cdots \\
 & 0 \arrow[u] \arrow[r] & C^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\delta"] & C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\delta"] & \cdots \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Théorème de de Rham : le théorème

Théorème

$H^*_{DR}(M) \simeq H^*(\Sigma(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)))$

Théorème

Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement simple
$H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \simeq H^*(\Sigma(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)))$.

Théorème

Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement simple
$H^*_{DR}(M) \simeq H^*(\Sigma(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)))$.

Théorème de de Rham : le théorème

Théorème

$H^*_{DR}(M) \simeq H^*(\Sigma(C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)))$

Théorème

Si $\mathfrak{U}$ est un recouvrement simple
$H^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \simeq H^*(\Sigma(C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)))$.

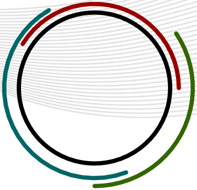
Théorème

Si $\mathfrak{U}$ est un recouvrement simple
$H^*_{DR}(M) \simeq H^*(\Sigma(C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)))$.

Théorème de de Rham : le théorème

Applications

- La cohomologie de Čech $\mathrm{H}^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ est la même pour tout recouvrement simple.
- Si M admet un recouvrement simple fini alors $\mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(M)$ est de dimension finie.
- On retrouve facilement la cohomologie de $\mathbb{S}^1$ avec le recouvrement simple ci-dessous.



Théorème de de Rham : le théorème

Définition

$$H^*(M, \mathscr{F}) = \varinjlim H^*(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$$

Théorème de de Rham

$$H^*_{DR}(M) \simeq H^*(M, \mathbb{R})$$