

# Topologie : Quelques précisions.

Jean-Baptiste Campesato

8 septembre 2009

Pour plus  
d'informations  
(définitions et  
explications des  
définitions) sur  
l'intersection et la  
réunion voir  
I Théorie des ensembles  
(E, II, p22/23) de N.  
BOURBAKI

Il s'agit de préciser la note en marge du document sur la caractérisation des topologies par leurs voisinages.

En effet on définit souvent une *structure topologique* (ou *topologie*) comme un ensemble  $\mathcal{O}$  de parties d'un ensemble  $E$  vérifiant :

- $\emptyset \in \mathcal{O}$  et  $E \in \mathcal{O}$ .
- Toute réunion d'ensembles de  $\mathcal{O}$  appartient aussi à  $\mathcal{O}$ .
- Toute intersection *finie* d'ensembles de  $\mathcal{O}$  appartient à  $\mathcal{O}$ .

Cependant seuls les deux derniers points sont nécessaires, en effet ils impliquent le premier, c'est que nous allons éclaircir ici.

D'après la définition si on se donne  $(X_i)_{i \in I}$  une famille de  $\mathcal{O}$  avec  $I$  fini alors  $\bigcup_{i \in I} X_i \in \mathcal{O}$  et

$$\bigcap_{i \in I} X_i \in \mathcal{O}.$$

Rappelons que  $\bigcup_{i \in I} X_i = \{x \mid (\exists i)(i \in I \text{ et } x \in X_i)\}$

et que  $\bigcap_{i \in I} X_i = \{x \mid x \in E \text{ et } (\forall i)((i \in I) \Rightarrow (x \in X_i))\}$  (la condition  $x \in E$  permet d'avoir une relation collectivisante lorsque  $I = \emptyset$ ).

Ainsi, si  $I = \emptyset$  la relation  $(\exists i)(i \in I \text{ et } x \in X_i)$  est toujours fausse et donc  $\bigcup_{i \in I} X_i = \emptyset$  et donc

$\emptyset \in \mathcal{O}$ . Et toujours si  $I = \emptyset$  la relation  $(\forall i)((i \in I) \Rightarrow (x \in X_i))$  est toujours vraie et donc

$\bigcap_{i \in I} X_i = E$  et donc  $E \in \mathcal{O}$ .

On a donc retrouvé le premier point à partir des deux derniers.

Montrons cependant une autre subtilité :

Toute intersection *finie* d'ensembles de  $\mathcal{O}$  appartient à  $\mathcal{O} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}, O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O} \\ E \in \mathcal{O} \end{cases}$ .

Il ne faut pas oublier le second point dans cette équivalence, en effet :

$\Rightarrow$  : le premier point est immédiat, le second a été montré ci dessus.

$\Leftarrow$  : tout le problème réside dans le fait qu'il ne faut pas oublier de traiter du cas de l'intersection vide.

Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille de  $\mathcal{O}$  avec  $I$  fini.

• Si  $I = \emptyset$  alors  $\bigcap_{i \in I} X_i = E \in \mathcal{O}$  d'après la seconde hypothèse.

• Sinon si  $I \neq \emptyset$  on montre par récurrence sur  $n = \text{card}(I)$  que  $\bigcap_{i \in I} X_i \in \mathcal{O}$  grâce à la première hypothèse. ■

Il faut retenir que pour montrer le troisième point de la définition d'une topologie il faut et il

suffit de vérifier  $\begin{cases} \forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}, O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O} \\ E \in \mathcal{O} \end{cases}$ .

Si l'hypothèse  $\emptyset \in \mathcal{O}$  et  $E \in \mathcal{O}$  est rajoutée dans les cours c'est donc pour penser à traiter ce point (prendre en compte le cas particulier  $I = \emptyset$ ), bien que ce soit inutile si les deux derniers points sont traités rigoureusement.