Topologie : Quelques précisions.

Jean-Baptiste Campesato

8 septembre 2009

Pour plus d'informations (définitions et explications des définitions) sur l'intersection et la réunion voir I Théorie des ensembles (E, II, p22/23) de N. Bourbaki

Il s'agit de préciser la note en marge du document sur la caractérisation des topologies par leurs voisinages.
En effet on définit souvent une *structure topologique* (ou *topologie*) comme un ensemble $\mathcal{O}$ de parties d'un ensemble E vérifiant :

- $\varnothing \in \mathcal{O}$ et $E \in \mathcal{O}$.
- Toute réunion d'ensembles de $\mathcal{O}$ appartient aussi à $\mathcal{O}$.
- Toute intersection *finie* d'ensembles de $\mathcal{O}$ appartient à $\mathcal{O}$.

Cependant seuls les deux derniers points sont nécéssaires, en effet ils impliquent le premier, c'est que nous allons éclaircir ici.
D'après la définition si on se donne $(X_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{O}$ avec I fini alors $\bigcup\limits_{i\in I} X_i \in \mathcal{O}$ et $\bigcap\limits_{i\in I} X_i \in \mathcal{O}$.
Rappellons que $\bigcup\limits_{i\in I} X_i = \{x \setminus (\exists i)(i \in I \text{ et } x \in X_i)\}$
et que $\bigcap\limits_{i\in I} X_i = \{x \setminus x \in E \text{ et } (\forall i)((i \in I) \Rightarrow (x \in X_i))\}$ (la condition $x \in E$ permet d'avoir une relation collectivisante lorsque $I = \varnothing$).
Ainsi, si $I = \varnothing$ la relation $(\exists i)(i \in I \text{ et } x \in X_i)$ est toujours fausse et donc $\bigcup\limits_{i\in I} X_i = \varnothing$ et donc $\varnothing \in \mathcal{O}$. Et toujours si $I = \varnothing$ la relation $(\forall i)((i \in I) \Rightarrow (x \in X_i))$ est toujours vraie et donc $\bigcap\limits_{i\in I} X_i = E$ et donc $E \in \mathcal{O}$.
On a donc retrouvé le premier point à partir des deux derniers.

Montrons cependant une autre subtilité :
Toute intersection *finie* d'ensembles de $\mathcal{O}$ appartient à $\mathcal{O} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall O_1, O_2 \in \mathcal{O},\, O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O} \\ E \in \mathcal{O} \end{cases}$.
Il ne faut pas oublier le second point dans cette équivalence, en effet :

> $\Rightarrow$: le premier point est immédiat, le second a été montré ci dessus.
>
> $\Leftarrow$: tout le problème réside dans le fait qu'il ne faut pas oublier de traiter du cas de l'intersection vide.
> Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{O}$ avec I fini.
> • Si $I = \varnothing$ alors $\bigcap\limits_{i\in I} X_i = E \in \mathcal{O}$ d'après la seconde hypothèse.
> • Sinon si $I \neq \varnothing$ on montre par récurrence sur $n = \operatorname{card}(I)$ que $\bigcap\limits_{i\in I} X_i \in \mathcal{O}$ grâce à la première hypothèse.
>
> ■

Il faut retenir que pour montrer le troisième point de la définition d'une topologie il faut et il suffit de vérifier $\begin{cases} \forall O_1, O_2 \in \mathcal{O},\, O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O} \\ E \in \mathcal{O} \end{cases}$.
Si l'hypothèse $\varnothing \in \mathcal{O}$ et $E \in \mathcal{O}$ est rajoutée dans les cours c'est donc pour penser à traiter ce point (prendre en compte le cas particulier $I = \varnothing$), bien que ce soit inutile si les deux derniers points sont traités rigoureusement.