

MÉMOIRE DE MASTER 2

---

# Cohomologie de de Rham

---

JEAN-BAPTISTE CAMPESATO

Sous la direction de :  
ADAM PARUSIŃSKI

Université Nice Sophia Antipolis  
Laboratoire J. A. Dieudonné

11 juin 2012

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Variétés différentielles</b>	<b>5</b>
1.1 Définition .....	5
1.2 Applications différentiables .....	7
1.3 Espace tangent en un point .....	10
1.4 Différentielles .....	10
1.5 Le fibré tangent .....	12
1.6 Partitions de l'unité d'une variété .....	14
1.7 Le théorème de plongement de Whitney .....	16
<b>2 Formes différentielles</b>	<b>19</b>
2.1 Rappels d'algèbre multilinéaire .....	19
2.2 Formes différentielles d'une variété .....	21
2.3 Orientation d'une variété différentielle .....	26
2.3.1 Premier point de vue : les atlas .....	26
2.3.2 Deuxième point de vue : orientation ponctuelle .....	27
2.3.3 Troisième point de vue : les formes volumes .....	29
2.3.4 Le revêtement d'orientation à deux feuillets .....	30
2.4 Intégration sur une variété différentielle .....	31
2.5 Théorème de Stokes .....	33
<b>3 Théorie de de Rham</b>	<b>36</b>
3.1 Introduction à la notion de cohomologie .....	36
3.2 Cohomologie de de Rham .....	39
3.3 Cohomologie de de Rham à support compact .....	42
3.4 Invariance par homotopie (ou lemme de Poincaré) .....	43
3.5 Lemme de Poincaré à support compact .....	45
3.6 Suites de Mayer-Vietoris .....	47
3.7 Recouvrements simples .....	51
3.8 Dimension finie de la cohomologie de de Rham .....	53
3.9 Dualité de Poincaré .....	54
3.10 Théorèmes de Künneth .....	59
3.11 Applications .....	63
3.11.1 Théorème du point fixe de Brouwer .....	63
3.11.2 Théorème de la boule chevelue .....	63
<b>4 Cohomologie de Čech</b>	<b>65</b>
4.1 Cohomologie de Čech relative à un recouvrement .....	65
4.2 Cohomologie des bicomplexes de modules .....	67
4.3 Complexe de Čech-de Rham .....	70
4.4 Explicitation des isomorphismes .....	74
4.5 Le théorème de Künneth revu par Čech .....	76
4.6 Cohomologie de Čech .....	77
4.6.1 Limite inductive .....	77
4.6.2 Cohomologie de Čech .....	79
4.7 Structures d'anneaux .....	81
<b>A Rappels sur les algèbres</b>	<b>83</b>
<b>Références</b>	<b>84</b>

# Introduction

Ce mémoire porte sur l'étude de la cohomologie de de Rham. Il a permis de m'initier à la fois à la topologie différentielle et à l'algèbre homologique. En effet, la cohomologie de de Rham est un outil en topologie différentielle au sens où elle permet l'étude des variétés différentielles.

La construction de cette théorie cohomologique repose sur des propriétés algébriques des formes différentielles, ainsi, avant de rentrer dans le vif du sujet, il a fallu que je me familiarise avec les notions de variétés différentielles, de formes différentielles et d'intégration sur ces dernières. J'ai commencé ce travail par étape avec le cas des sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$  à l'aide de la lecture de [7]. J'ai ensuite pu passer au niveau d'abstraction supérieur en m'intéressant aux variétés différentielles, principalement grâce à [8] et [5]. Dans un souci d'exhaustivité, j'ai évité au maximum de faire des impasses. Par exemple, contrairement aux livres cités jusque là, j'ai décidé de démontrer le théorème de plongement de Whitney sans faire d'hypothèse de compacité. Ce travail préliminaire forme les deux premières parties de ce mémoire.

J'ai dû ensuite m'intéresser à l'algèbre homologique, ce que j'ai fait à l'aide de [11], il s'en est suivi une gymnastique pour adapter ces nouveaux acquis à la théorie de de Rham : quelles structures algébriques choisir ? comment transposer à la cohomologie ?

Les troisième et quatrième parties suivent un agencement proche de celui de [1] mais le contenu s'en détache sensiblement. En effet, chaque résultat rencontré a donné lieu à une recherche bibliographique pour essayer d'obtenir les hypothèses les plus générales sans pour autant rentrer dans un excès d'abstraction. Ce fait est par exemple visible dans l'étude de la dualité de Poincaré et du théorème de Künneth dont les démonstrations ici reposent sur une analyse plus fine de la topologie des variétés différentielles. De même, j'ai essayé d'externaliser les méthodes et les résultats généraux des démonstrations, comme en témoignent par exemple le paragraphe dédié à une introduction à l'algèbre homologique et celui dédié à l'étude des bicomplexes. Dans la même optique, la présentation de la cohomologie de Čech est plus générale sans faire d'hypothèse contraignante sur l'ensemble des indices d'un recouvrement par des ouverts.

Le mémoire se termine sur le théorème de de Rham concernant l'isomorphisme entre la cohomologie de de Rham d'une variété différentielle et sa cohomologie de Čech. Nous savions déjà, depuis le paragraphe sur l'invariance homotopique, que la cohomologie de de Rham ne dépendait pas de la structure différentielle de la variété, mais seulement de sa topologie, ce résultat reste néanmoins très surprenant vu que la cohomologie de de Rham repose sur des propriétés algébriques des formes différentielles alors que la cohomologie de Čech repose sur la combinatoire des recouvrements par des ouverts.

À chaque nouveau concept, j'ai essayé de tirer profit des différents points de vue que m'apportait la littérature afin d'obtenir la présentation qui me semblait la plus pertinente. J'ai ainsi dû faire certains choix, par exemple la construction des formes différentielles, mais tout en essayant de préciser l'existence de méthodes alternatives. Dans certains cas et dans un souci de généralité, j'ai pris la décision de présenter plusieurs visions possibles d'un concept, il a alors fallu réaliser un travail pour choisir l'agencement et les relier les unes aux autres, c'est par exemple le cas pour l'orientation des variétés différentielles.

La bibliographie contient les œuvres qui m'ont été le plus utiles. Elle est cependant incomplète au sens où certaines idées et certaines méthodes proviennent de la lecture de passages de livres que j'ai parcourus et dont je n'ai plus forcément la référence. C'est particulièrement le cas pour la démonstration du théorème de plongement de Whitney.

J'ai rédigé ce mémoire en gardant constamment à l'esprit le souhait que quiconque, sans connaissance préalable en topologie différentielle et en algèbre homologique, puisse comprendre et tirer profit de ce travail. J'ai ainsi fait le choix de donner les preuves les plus élémentaires possibles. Un très bon exemple concerne le paragraphe sur les recouvrements simples : on trouve généralement dans la littérature une preuve de l'existence pour tout recouvrement par des ouverts, d'un raffinement étant un bon recouvrement, et ce utilisant un argument (souvent incomplet) de géométrie riemannienne, alors que ce mémoire contient une preuve élémentaire de l'existence d'un raffinement simple basée sur [10].

C'est aussi dans cette optique que j'ai essayé, d'une part, de faire ressortir les arguments généraux en les externalisant, et d'autre part, de ne pas rester trop théorique en donnant un certain nombre d'exemples et d'applications.

Je tiens enfin à remercier A. PARUSIŃSKI qui a su m'aiguiller tout au long de ce mémoire et me faire profiter de ses conseils, de ses remarques pertinentes et de ses références intéressantes.



GEORGES DE RHAM  
1903 – 1990

# 1 Variétés différentielles

De façon informelle, une variété de dimension  $n$  est un espace topologique localement homéomorphe à un espace euclidien de dimension  $n$ . Ainsi les variétés différentielles sont des espaces topologiques admettant un recouvrement par des ouverts homéomorphes à des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  et dont les intersections de deux ouverts sont compatibles selon un sens qu'il reste à définir.

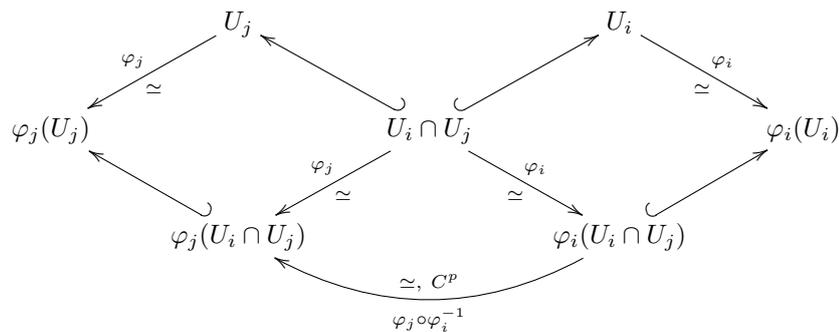
Par analogie, on peut voir ces ouverts comme les cartes d'un atlas géographique avec une certaine redondance sur les bords des cartes pour pouvoir les mettre bout à bout.

## 1.1 Définition

### Définition 1.1 : atlas

Un atlas de classe  $C^p$ ,  $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , et de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  sur un espace topologique  $X$  est la donnée d'un ensemble de couples  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  tel que :

- (i)  $\forall i \in I$ ,  $U_i$  est un ouvert de  $X$  et  $\varphi_i$  est un homéomorphisme de  $U_i$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .
- (ii)  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ .
- (iii)  $\forall i, j \in I$ ,  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$  est un  $C^p$ -difféomorphisme.



### Remarques 1.2 :

- $\forall i, j \in I$ ,  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .
- Le couple  $(U_i, \varphi_i)$  est une *carte* de l'atlas.
- Si  $x \in U_i$ ,  $(U_i, \varphi_i)$  est une *carte en*  $x$ .
- Si  $\varphi_i(x) = 0$ ,  $(U_i, \varphi_i)$  est une *carte centrée en*  $x$ .
- Le  $n$ -uplet  $\varphi_i(x) = (\varphi_{i1}(x), \dots, \varphi_{in}(x))$  représente les *coordonnées locales de*  $x$  associées à la carte  $(U_i, \varphi_i)$ .
- L'application  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  est nommée *application de changement de cartes*.

### Définition 1.3 : atlas compatibles

Deux atlas de classe  $C^p$  sur  $X$  sont *compatibles* si leur réunion est encore un atlas de classe  $C^p$  sur  $X$ , il s'agit d'une relation d'équivalence.

Chaque classe d'équivalence admet un représentant privilégié : l'*atlas maximal* obtenu en considérant la réunion de tous les atlas compatibles (qui est encore compatible).

### Remarques 1.4 :

- Pour vérifier que deux atlas sont compatibles il suffit donc de vérifier qu'étant données une carte  $(U, \varphi)$  du premier atlas et une carte  $(V, \psi)$  du second atlas, l'application de transition  $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$  est un  $C^p$ -difféomorphisme.
- Tout atlas est donc contenu dans un unique atlas *maximal* pour l'inclusion.

On parle aussi de la *structure différentielle* de la variété.

Les hypothèses topologiques séparé et à base dénombrable permettent de construire une partition de l'unité. Voir la section 1.6 page 14.

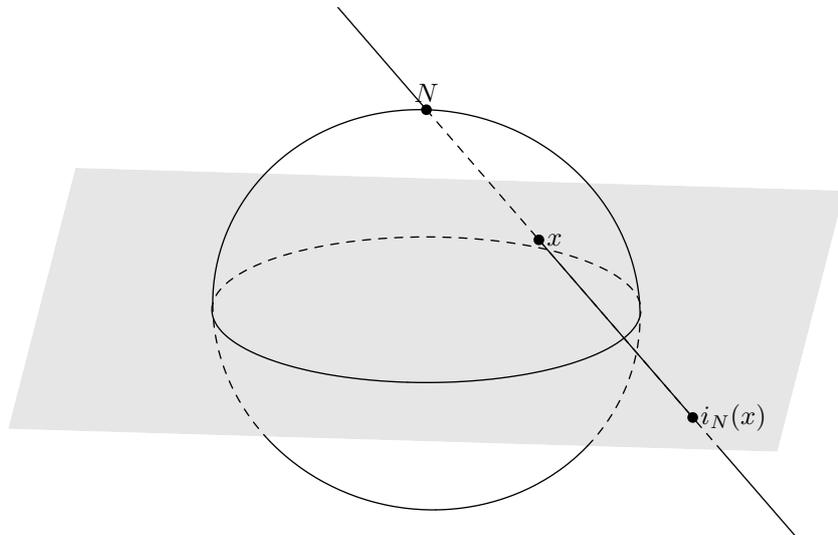
**Définition 1.5 : variété différentielle**

Une variété différentielle de classe  $C^p$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ , et de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  est la donnée d'un espace topologique  $M$  séparé et à base dénombrable, et d'un atlas maximal sur  $M$  de classe  $C^p$  et de dimension  $n$ .

**Remarques 1.6 :**

- Une variété topologique est une « variété différentielle » de classe  $C^0$ .
- Une variété différentielle lisse est une variété différentielle de classe  $C^\infty$ .
- Par définition de l'atlas maximal, pour montrer qu'un espace séparé et à base dénombrable est une variété différentielle, il suffit d'exhiber un atlas.
- Une variété de classe  $C^p$  est aussi de classe  $C^k$ ,  $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ .

**Exemple 1.7 : la sphère  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$**



Soient  $N = (1, 0, \dots, 0)$  et  $S = (-1, 0, \dots, 0)$ . Posons  $U_N = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$  et  $U_S = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ . On construit la projection stéréographique de  $\mathbb{S}^n$  sur l'hyperplan équatorial  $H = \{x_0 = 0\} \simeq \mathbb{R}^n$  par rapport à  $N$  en associant à tout point  $x \in U_N$  l'intersection de  $(Nx)$  et de  $H$ . De même pour la projection stéréographique par rapport à  $S$ .

$$U_N \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Après calculs on obtient  $i_N : x \longmapsto \frac{1}{1-x_0}(x_1, \dots, x_n)$  et

$$U_S \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$i_S : x \longmapsto \frac{1}{1+x_0}(x_1, \dots, x_n) .$$

Il s'agit d'homéomorphismes d'inverses  $i_N^{-1}(y) = \frac{1}{\|y\|^2+1}(\|y\|^2 - 1, 2y_1, \dots, 2y_n)$  et  $i_S^{-1}(y) = \frac{1}{\|y\|^2+1}(-\|y\|^2 + 1, 2y_1, \dots, 2y_n)$ .

L'application de changement de cartes est donnée par  $i_S \circ i_N^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$y \longmapsto \frac{y}{\|y\|^2} .$$

**Exemple 1.8 : l'espace projectif réel  $P^n\mathbb{R}$**

En utilisant la définition de  $P^n\mathbb{R}$  comme quotient des points antipodaux de  $\mathbb{S}^n$  on vérifie que  $P^n\mathbb{R}$  est séparé.

La relation d'équivalence sur  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  qui définit  $P^n\mathbb{R}$  est ouverte, donc comme  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  admet une base dénombrable, il en est de même pour  $P^n\mathbb{R}$ .

Nous allons munir  $P^n\mathbb{R}$  d'une structure différentielle lisse de dimension  $n$ .

Posons  $U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \in P^n\mathbb{R}, x_i \neq 0\}$  pour  $0 \leq i \leq n$ . Comme la relation est ouverte, on vérifie aisément que  $U_i$  est un ouvert de  $P^n\mathbb{R}$ .

Pour  $i = 0, \dots, n$ ,  $\varphi_i : [x_0 : \dots : x_n] \mapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \in \mathbb{R}^n$  où  $\frac{\widehat{x_i}}{x_i}$  signifie

que l'on omet cette entrée, est un homéomorphisme d'inverse  $\varphi_i^{-1} : (a_1, \dots, a_n) \mapsto [a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_i, \dots, a_n]$  (en effet  $\varphi_i \circ \text{pr} : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue donc  $\varphi_i$  est continue et  $\text{pr} \circ \varphi_i^{-1}$  est continue donc  $\varphi_i^{-1}$  aussi).

On vérifie maintenant facilement que  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  est un atlas dont les applications de changement de cartes sont  $C^\infty$ . ■

Remarque 1.9 : de la même façon, on montre que  $P^n\mathbb{C}$  est une variété différentielle lisse de dimension  $2n$  (cette fois  $\varphi_i(U_i) = \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ ).

## 1.2 Applications différentiables

Nous ne savons faire du calcul différentiel que sur des ouverts d'espaces vectoriels normés. L'intérêt des variétés est de pouvoir faire du calcul différentiel localement en se ramenant à des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  via les cartes. D'où la définition suivante.

**Définition 1.10** : application lue dans deux cartes

Soient  $f : M \rightarrow N$  une application entre deux variétés,  $(U, \varphi)$  une carte de  $M$  et  $(V, \psi)$  une carte de  $N$ .

Alors l'application  $f$  lue en  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  est  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$ .

**Définition 1.11** : application de classe  $C^p$  en un point

Une application  $f : M \rightarrow N$  entre deux variétés différentielles de classe  $C^p$  est dite de classe  $C^p$  en  $x \in M$ , s'il existe une carte locale  $(U, \varphi)$  de  $M$  en  $x$  et une carte locale  $(V, \psi)$  de  $N$  en  $f(x)$  telles que  $f(U) \subset V$  et que l'application  $f$  lue dans ces cartes soit de classe  $C^p$  en  $\varphi(x)$ .

Remarques 1.12 :

- En particulier une application de classe  $C^p$  en  $x$  est continue en  $x$  (localement  $f = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$ ).
- On dira que  $f$  est différentiable lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté et que  $p \geq 1$  (si  $p = 0$ , on a une application continue).
- Une application lisse est une application de classe  $C^\infty$  entre variétés lisses.
- On peut remplacer l'hypothèse  $f(U) \subset V$  par  $f$  continue de sorte à ce que  $f^{-1}(V)$  soit un ouvert.
- Une des cartes est inutile si une des deux variétés est un ouvert d'un espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ .
- La définition est cohérente du fait de la régularité des applications de changement de cartes : elle ne dépend pas du choix des cartes.

Démonstration :

Soient  $(U_1, \varphi_1)$  et  $(U_2, \varphi_2)$  deux cartes en  $x$  et  $(V_1, \psi_1)$  et  $(V_2, \psi_2)$  deux cartes en  $f(x)$ ,  $\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1} = \psi_2 \circ \psi_1^{-1} \circ (\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \circ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$  de  $\varphi_2(U_1 \cap U_2 \cap f^{-1}(V_1 \cap V_2))$  dans  $\psi_2(V_1 \cap V_2)$ , donc si  $\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$  est de classe  $C^p$  en  $\varphi_1(x)$ , alors  $\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}$  est de classe  $C^p$  en  $\varphi_2(x)$ . ■

Remarque 1.13 : On déduit de cette démonstration que si  $f : M \rightarrow N$  est de classe  $C^p$  en  $x$  alors l'application lue en n'importe quelles cartes en  $x$  et  $f(x)$  est  $C^p$ .

**Définition 1.14** : application de classe  $C^p$  entre deux variétés

Une application  $f : M \rightarrow N$  entre deux variétés différentielles est dite de classe  $C^p$  si elle l'est en tout point de  $M$ .

**Caractérisations 1.15**

Soit  $f : M \rightarrow N$  une application continue entre deux variétés. Alors sont équivalents :

- (i)  $f$  est de classe  $C^p$ .
- (ii) il existe un atlas  $\mathcal{U}$  de  $M$  et un atlas  $\mathcal{V}$  de  $N$  tels que pour toutes cartes  $(U, \varphi)$  de  $\mathcal{U}$  et  $(V, \psi)$  de  $\mathcal{V}$ ,  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  est  $C^p$ .
- (iii) pour toutes cartes  $(U, \varphi)$  de  $M$  et  $(V, \psi)$  de  $N$ ,  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  est  $C^p$ .

Remarque 1.16 : il suffit donc de vérifier l'aspect  $C^p$  sur un atlas définissant la structure différentielle.

Le théorème de composition des applications de classe  $C^p$  se généralise aux applications de classe  $C^p$  entre deux variétés :

**Théorème 1.17** : composition d'applications de classe  $C^p$ 

Soient  $f : M \rightarrow N$  et  $g : N \rightarrow P$  deux applications de classe  $C^p$  entre variétés différentielles alors  $g \circ f : M \rightarrow P$  est encore de classe  $C^p$ .

Démonstration :

Soit  $x \in M$ , comme  $f$  est de classe  $C^p$  en  $x$ , il existe une carte  $(U, \varphi)$  en  $x$  et une carte  $(V_1, \psi_1)$  en  $f(x)$  telles que  $\psi_1 \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V_1)) \rightarrow \psi_1(V_1)$  soit de classe  $C^p$ . Comme  $g$  est de classe  $C^p$  en  $f(x)$ , il existe une carte  $(V_2, \psi_2)$  en  $f(x)$  et une carte  $(W, \xi)$  en  $g(f(x))$  telles que  $\xi \circ g \circ \psi_2^{-1} : \psi_2(V_2 \cap g^{-1}(W)) \rightarrow \xi(W)$  soit de classe  $C^p$ . Donc  $\xi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\xi \circ g \circ \psi_2^{-1}) \circ (\psi_2 \circ \psi_1^{-1}) \circ (\psi_1 \circ f \circ \varphi^{-1})$  est de classe  $C^p$  en  $\varphi(x)$ . ■

**Définition 1.18** :  $C^p$ -difféomorphisme

Un  $C^p$ -difféomorphisme entre deux variétés est une bijection de classe  $C^p$  dont la réciproque est aussi de classe  $C^p$ .

Remarque 1.19 : lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté on parlera simplement de difféomorphisme.

Remarque 1.20 : les variétés différentielles de classe  $C^p$  forment une catégorie dont les morphismes sont les applications de classe  $C^p$ .

**Attention** : deux structures différentielles sur un même espace peuvent être difféomorphes mais distinctes, c'est-à-dire pas définies par le même atlas maximal.

Par exemple, l'atlas  $\{(\mathbb{R}, \sqrt[3]{t})\}$  définit sur  $\mathbb{R}$  une structure difféomorphe à la structure canonique  $\{(\mathbb{R}, t)\}$ , mais différente.

Exemple 1.21 : la sphère de Riemann

Nous savons que  $P^1\mathbb{C}$  est une variété différentielle lisse de dimension 2 dont un atlas est  $\{(U_0, \varphi_0), (U_1, \varphi_1)\}$  où

$$U_0 = \{[x_0 : x_1] \in P^1\mathbb{C}, x_0 \neq 0\}, \varphi_0 : [x_0 : x_1] \mapsto \frac{x_1}{x_0}$$

$$U_1 = \{[x_0 : x_1] \in P^1\mathbb{C}, x_1 \neq 0\}, \varphi_1 : [x_0 : x_1] \mapsto \frac{x_0}{x_1} .$$

$$\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

L'application de changement de cartes est donnée par  $z \mapsto \frac{1}{z}$  .

$$P^1\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{S}$$

En posant  $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ,  $s : [x_0 : x_1] \mapsto \frac{x_1}{x_0}$  est une bijection et permet de transporter

la topologie et la structure différentielle de  $P^1\mathbb{C}$  sur  $\mathbb{S}$  :

$$U_0 = \mathbb{C}, \varphi_0 : z \mapsto z$$

$$U_1 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}, \varphi_1 : z \mapsto \frac{1}{z} .$$

Nous allons montrer que  $\mathbb{S}$  est difféomorphe à  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  (voir 1.7). Considérons la projection

$$\mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}$$

stéréographique par rapport au pôle nord  $N = (1, 0, 0)$ ,  $s : (x_0, x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_0}$  où

$s(1, 0, 0) = \infty$ . Nous savons déjà que la restriction  $s|_{\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}} = i_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$  est un difféomorphisme. Il reste à vérifier qu'il s'agit d'un difféomorphisme local au voisinage de  $N$ . Pour cela, on utilise la carte  $(\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}, i_S)$  à la source et la carte  $(U_1, \varphi_1)$  au but, alors

$$\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$$

$$\varphi_1 \circ s \circ i_S^{-1} = \varphi_1 \circ i_N \circ i_S^{-1} : z \mapsto \bar{z} . \quad \blacksquare$$

**Définition 1.22 : variété produit**

Si  $M$  et  $N$  sont deux variétés de classe  $C^p$  munies d'atlas respectifs  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  et  $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$  alors on munit le produit  $M \times N$  de l'atlas de classe  $C^p$   $\{(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j)\}_{(i,j) \in I \times J}$ .

Remarque 1.23 : il est alors facile de vérifier que  $pr_1 : M \times N \rightarrow M$  et  $pr_2 : M \times N \rightarrow N$  sont de classe  $C^p$  et  $pr_1 : M \times \{n\} \rightarrow M$  est un difféomorphisme pour  $n \in N$ .

**Définition 1.24 : sous-variété (régulière)**

Une partie  $N$  d'une variété  $M$  de dimension  $n$  est une sous-variété de dimension  $p$  si pour tout  $m \in N$  il existe des voisinages ouverts  $U$  et  $V$  respectivement de  $m$  dans  $M$  et de  $0$  dans  $\mathbb{R}^n$  et un difféomorphisme  $f : U \rightarrow V$  tel que  $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ . Cela revient à dire que pour tout  $m \in N$ , il existe une carte  $(U, \varphi)$  contenant  $m$  telle que  $\varphi(U \cap N)$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $p$ .

Remarque 1.25 : Alors  $\{(U \cap N, \varphi_N)\}$  est un atlas pour la topologie induite où  $\varphi_N$  est donnée par les  $p$  premières coordonnées de  $\varphi$ . Une sous-variété de dimension  $p$  est donc une variété de dimension  $p$ .

Remarque 1.26 : une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  est donc une variété.

### 1.3 Espace tangent en un point

Soit  $M$  une variété différentielle et  $m \in M$ . Posons  $\mathcal{C}_m^M = \{c : I \rightarrow M, I \text{ intervalle ouvert}, 0 \in I, c(0) = m, c \text{ de classe } C^p\}$ .

Deux courbes de  $\mathcal{C}_m^M$  sont tangentes en  $m$  s'il existe une carte  $(U, \varphi)$  en  $m$  telle que  $(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0)$ .

Cette condition ne dépend pas du choix de la carte :

Si  $(V, \psi)$  est une autre carte alors  
 $(\psi \circ c_i)'(0) = (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c_i)'(0) = d_{\varphi(m)}(\psi \circ \varphi^{-1})((\varphi \circ c_i)'(0))$  ■

On a donc défini une relation d'équivalence sur  $\mathcal{C}_m^M$ , d'où :

**Définition 1.27 : Espace tangent**

Une classe d'équivalence est un *vecteur tangent* à  $M$  en  $m$  et on nomme *espace tangent* à  $M$  en  $m$  l'espace quotient noté  $T_m M$ .

On va désormais munir  $T_m M$  d'une structure d'espace vectoriel.

Si  $(U, \varphi)$  est une carte en  $m$ , on pose  $\theta_\varphi : \bar{c} \mapsto (\varphi \circ c)'(0)$  où  $n = \dim M$ . Alors  $\theta_\varphi$

est injective par définition et surjective car si  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $\theta_\varphi(\bar{c}) = v$  où  $c : t \rightarrow \varphi^{-1}(tv + \varphi(m))$ .

Si  $\xi, \eta \in T_m M$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on pose  $\xi + \eta = \theta_\varphi^{-1}(\theta_\varphi(\xi) + \theta_\varphi(\eta))$  et  $\lambda\xi = \theta_\varphi^{-1}(\lambda\theta_\varphi(\xi))$ .

Si  $(V, \psi)$  est une autre carte en  $m$  alors  $(\theta_\varphi \circ \theta_\psi^{-1})(v) = [d_{\psi(m)}(\varphi \circ \psi^{-1})](v)$ .

On obtient donc bien une structure d'espace vectoriel indépendante de la carte et  $\theta_\varphi : T_m M \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier  $\dim T_m M = \dim M$ .

Remarques 1.28 :

- Si  $U$  est un ouvert de  $M$  alors  $T_m U = T_m M$ .
- $T_{(m,m')}(M \times M') = T_m M \oplus T_{m'} M'$ .

### 1.4 Différentielles

**Définition 1.29 : application différentielle**

Soit  $f : M \rightarrow N$  une application différentiable entre variétés différentielles ; alors pour

tout  $m \in M$  l'application  $\begin{matrix} \mathcal{C}_m^M & \longrightarrow & \mathcal{C}_{f(m)}^N \\ c & \longmapsto & f \circ c \end{matrix}$  passe au quotient en une application

linéaire  $T_m f : T_m M \rightarrow T_{f(m)} N$  nommée *différentielle de  $f$  en  $m$*  (ou *application linéaire tangente de  $f$  en  $m$* ).

Si  $(U, \varphi)$  est une carte en  $m$  et  $(V, \psi)$  est une carte en  $f(m)$  alors comme  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  est différentiable et que  $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c) = \psi \circ f \circ c$  on en déduit que l'image de courbes tangentes sont tangentes.

De plus le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} T_m M & \xrightarrow{T_m f} & T_{f(m)} N \\ \theta_\varphi \downarrow & & \downarrow \theta_\psi \\ \mathbb{R}^{\dim M} & \xrightarrow{d_{\varphi(m)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})} & \mathbb{R}^{\dim N} \end{array}$$

En particulier  $f : U \rightarrow V$  où  $U$  et  $V$  sont respectivement des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  et de  $\mathbb{R}^m$  alors

$T_x U = \mathbb{R}^n$  et  $T_{f(x)} V = \mathbb{R}^m$  et on retrouve la différentielle usuelle  $T_x f = d_x f$ .

**Proposition 1.30 : composition des différentielles**

Si  $f : M \rightarrow N$  et  $g : N \rightarrow P$  sont deux applications différentiables entre variétés alors  $\forall m \in M, T_m(g \circ f) = T_{f(m)}g \circ T_m f$ .

Démonstration :

Si  $(U, \varphi), (V, \psi)$  et  $(W, \chi)$  sont respectivement des cartes en  $x, f(x)$  et  $g(f(x))$ , alors on se ramène au théorème de composition des différentielles usuelles à l'aide du diagramme précédent, appliqué à  $\varphi \circ f \circ \psi^{-1}$  et à  $\psi \circ g \circ \chi^{-1}$ . ■

**Corollaire 1.31**

Si  $f : M \rightarrow N$  est un difféomorphisme alors  $T_m f$  est un isomorphisme et  $(T_m f)^{-1} = T_{f(m)}(f^{-1})$ .

Remarques 1.32 :

- Si  $\dim M = n$  et si  $(U, \varphi)$  est une carte alors  $\theta_\varphi = T_m \varphi : T_m M = T_m U \rightarrow \mathbb{R}^n$  donc  $\theta_\varphi^{-1}(e_i) = T_{\varphi(m)}(\varphi^{-1})(e_i)$  est une base de  $T_m M$  et  $(T_m \varphi)_i$  est la base duale où  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ .
- Sur l'intersection de deux cartes, on change facilement de bases :  $T_{\varphi(m)} \psi \circ \varphi^{-1} = T_m \psi \circ T_{\varphi(m)} \varphi^{-1} \Rightarrow T_{\varphi(m)} \varphi^{-1} = T_{\varphi(m)}(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ T_{\psi(m)} \psi^{-1}$
- Si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}, T_m f \circ \theta_\varphi^{-1}$  est la différentielle de  $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Si  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  et si  $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  est l'inclusion naturelle alors  $T_m i$  est un isomorphisme entre  $T_m M$  l'espace tangent en  $m$  pour les sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ .

Exemple 1.33 : espace tangent de  $\mathbb{S}^n$  en un point

On déduit du dernier point que si  $x \in \mathbb{S}^n$  alors  $T_x \mathbb{S}^n \simeq \ker d_x f = \{y \in \mathbb{R}^{n+1}, (x|y) = 0\}$  où

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f : (x_0, \dots, x_n) & \longmapsto & x_0^2 + \dots + x_n^2 \end{array} \quad \blacksquare$$

Nous pouvons généraliser les notions d'immersion et de submersion. Nous pouvons aussi obtenir des versions de nos théorèmes classiques de calcul différentiel :

**Théorème 1.34 : inversion locale pour les variétés**

Soit  $f : M \rightarrow N$  lisse entre variétés différentielles de même dimension. Soient  $m \in M, (U, \varphi)$  une carte en  $m$  et  $(V, \psi)$  une carte en  $f(m)$ .

Posons  $f_i = \psi_i \circ f$  et  $\left. \frac{df_i}{d\varphi_j} \right|_m = T_m f_i(T_{\varphi(m)}(\varphi^{-1})(e_j))$ .

Si le jacobien  $\det \left[ \frac{df_i}{d\varphi_j} \right]_m$  est non nul alors  $f$  est un difféomorphisme local en  $m$ .

Remarque 1.35 :  $\det \left[ \frac{df_i}{d\varphi_j} \right]_m \neq 0 \Leftrightarrow T_m f$  isomorphisme (matrice dans les bases usuelles).

Démonstration :

$T_m f$  isomorphisme  $\Leftrightarrow d_{\varphi(m)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$  isomorphisme  $\Rightarrow \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  difféomorphisme local en  $\varphi(m)$  par le théorème d'inversion locale usuel  $\Rightarrow f$  difféomorphisme local en  $m$ . ■

**Théorème 1.36 : du rang constant**

Soit  $f : M \rightarrow N$  une application lisse entre deux variétés différentielles  $M$  et  $N$  de dimensions respectives  $m$  et  $n$ .

Supposons que  $f$  soit de rang constant égal à  $k$  sur un voisinage d'un point  $p$  de  $M$ , alors il existe des cartes  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  centrées respectivement en  $p$  et  $f(p)$  telles que pour  $(r_1, \dots, r_m) \in \varphi(U)$ ,  $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(r_1, \dots, r_m) = (r_1, \dots, r_k, 0, \dots, 0)$ .

**Démonstration :**

Soit  $(\bar{U}, \bar{\varphi})$  et  $(\bar{V}, \bar{\psi})$  des cartes respectivement en  $p$  et  $f(p)$ . Alors  $\bar{\psi} \circ f \circ \bar{\varphi}^{-1}$  est de rang constant égal à  $k$  sur un voisinage de  $\bar{\varphi}(p)$ .

D'après le théorème du rang constant dans les espaces  $\mathbb{R}^n$ , il existe un difféomorphisme  $G$  sur un voisinage ouvert de  $\bar{\varphi}(p)$  dans un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  et un difféomorphisme  $F$  sur un voisinage ouvert de  $\bar{\psi} \circ f \circ \bar{\varphi}^{-1}$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $F \circ \bar{\psi} \circ f \circ \bar{\varphi}^{-1} \circ G^{-1}(r_1, \dots, r_m) = (r_1, \dots, r_k, 0, \dots, 0)$ . Il suffit alors de poser  $\varphi = G \circ \bar{\varphi}$  et  $\psi = F \circ \bar{\psi}$ . ■

**Théorèmes 1.37**

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles de dimensions respectives  $m$  et  $n$ .

- (i) **(théorème d'immersion)** Si  $f : M \rightarrow N$  est une immersion en  $p \in M$  alors il existe des cartes  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  centrées respectivement en  $p$  et  $f(p)$  telles que pour  $(r_1, \dots, r_m) \in \varphi(U)$ ,  $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(r_1, \dots, r_m) = (r_1, \dots, r_m, 0, \dots, 0)$ .
- (ii) **(théorème de submersion)** Si  $f : M \rightarrow N$  est une submersion en  $p \in M$  alors il existe des cartes  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  centrées respectivement en  $p$  et  $f(p)$  telles que pour  $(r_1, \dots, r_m) \in \varphi(U)$ ,  $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(r_1, \dots, r_m) = (r_1, \dots, r_n)$ .

**Démonstration :**

C'est un corollaire immédiat du théorème du rang constant et du lemme suivant :

**Lemme**

Si  $f : M \rightarrow N$  est une immersion (resp. submersion) en  $p$  alors  $f$  est de rang constant égal à  $m$  (resp.  $n$ ) sur un voisinage de  $p$ .

Avec les notations du théorème d'inversion locale,  $T_p f$  est injective (resp. surjective) si et seulement si  $m \leq n$  et  $\text{rg} \left( \frac{df_i}{d\varphi_j(p)} \right) = m$  (resp.  $n \leq m$  et  $\text{rg} = n$ ). Donc  $f$  est une immersion (resp. submersion) en  $p$  si la jacobienne de  $f$  en  $p$  est de rang maximal.

Or  $D = \{x \in M, \text{ la jacobienne en } x \text{ est de rang maximal}\}$  est un ouvert : notons  $k$  le rang maximal, alors le complémentaire de  $D$  est l'ensemble des points où le rang est  $< k$ , ce qui revient à annuler les mineures, c'est donc l'ensemble de zéro d'un nombre fini d'applications continues, et donc un fermé.

Ce qui démontre le lemme. ■

## 1.5 Le fibré tangent

Nous allons voir que l'ensemble des espaces tangents d'une variété admet une structure de fibré vectoriel : on obtient un foncteur de la catégorie des variétés dans la catégorie des fibrés vectoriels.

Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $n$  et de classe  $C^p$ ,  $p > 0$ , on note  $TM = \bigsqcup_{m \in M} T_m M$  et si  $(U, \varphi)$  est une carte de  $M$  on pose  $TU = \bigsqcup_{m \in U} T_m U = \bigsqcup_{m \in U} T_m M$ .

L'application  $\Phi : (m, \xi) \mapsto (\varphi(m), T_m \varphi(\xi))$  est une bijection de  $TU$  dans  $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$  (on rappelle que  $T_m \varphi$  ne dépend pas de  $m$  mais que de  $U$  et que  $T_m \varphi(\xi)$  donne les coordonnées de  $\xi$  dans la base usuelle, voir 1.32).

Si  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  est l'atlas maximal de  $M$ , on munit  $TU$  d'une topologie en imposant les conditions

suivantes :

- (i) Les  $TU_i$  sont des ouverts.
- (ii) Les  $\Phi_i$  sont des homéomorphismes.

Ainsi,  $\Omega \subset TM$  est un ouvert si et seulement si  $\forall i, \Phi_i(\Omega \cap TU_i)$  est un ouvert de  $\varphi(U_i) \times \mathbb{R}^n$ .

$$\text{L'application } \Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : \begin{matrix} \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \\ (y, v) & \longmapsto & ((\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(y), T_y(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(v)) \end{matrix} \text{ est un}$$

$C^p$ -difféomorphisme.

Ainsi  $TM$  est une variété de classe  $C^{p-1}$  et de dimension  $2n$  pour l'atlas  $\{(TU_i, \Phi_i)\}$ .

**Proposition 1.38**

La projection canonique  $p : TM \rightarrow M$  est un fibré vectoriel de rang  $n$ .

Démonstration :

$$\text{Il suffit d'introduire les trivialisations } \psi_i : \begin{matrix} p^{-1}(U_i) = TU_i & \longrightarrow & U_i \times \mathbb{R}^n \\ \xi \in T_x U_i & \longmapsto & (x, T_x \varphi_i(\xi)) \end{matrix} . \quad \blacksquare$$

On nomme donc  $TM$  le fibré tangent de  $M$ .

Remarquons que  $f : M \rightarrow N$  de classe  $C^p$  entre variétés différentielles induit une application  $Tf : TM \rightarrow TN$  de classe  $C^{p-1}$  donnée par les  $(T_x f)_{x \in M}$  et dont la restriction à chaque fibre  $T_x M$  est l'application linéaire  $T_x f : TM \xrightarrow{Tf} TN$ .

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

De plus  $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$ .

On rappelle qu'une section est une application continue  $s : M \rightarrow TM$  telle que  $p \circ s = id_M$  (ie  $\forall x, s(x) \in T_x M$ ). On note  $\Gamma(TM)$  l'espace vectoriel des sections.

Remarque 1.39 : si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  alors  $TU$  est un fibré trivial et donc  $\Gamma(TU)$  s'identifie aux applications continues de  $U$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.40 : champ de vecteurs**

Un champ de vecteurs  $X$  d'une variété  $M$  est une application  $X : M \rightarrow TM$  telle que  $p \circ X = id$ .

$$\begin{matrix} M & \longrightarrow & TM \\ \text{On note } X : m & \longmapsto & X_m \end{matrix} .$$

Remarque 1.41 : si  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  est un atlas d'une variété différentielle  $M$  de classe  $C^p$ , on remarque à l'aide de l'atlas correspondant sur  $TM$  qu'un champ de vecteurs de classe  $C^p$  est la donnée d'une famille d'applications  $X_i \in C^p(U_i, \mathbb{R}^n)$  compatibles au sens où  $\forall x \in U_i \cap U_j, X_i(x) = d_{\varphi_j(x)}(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(X_j(x))$ .

Il s'agit d'une sorte de section, possiblement discontinue, dont on s'intéressera à la régularité.

## 1.6

## Partitions de l'unité d'une variété

On doit la notion de partition de l'unité (1937) à celui qui a donné son nom au laboratoire :  
JEAN ALEXANDRE DIEUDONNÉ  
(introduite de façon indépendante et simultanée avec SALOMON BOCHNER).

## Définition 1.42 : partition de l'unité

On appelle *partition de l'unité* d'un espace topologique  $X$  une famille de fonctions continues  $(\rho_i)_{i \in I}$  définies sur  $X$  et à valeurs positives telle que pour tout  $x \in X$  on ait les conditions suivantes :

- (i) Il existe un voisinage de  $x$  tel que toutes les fonctions  $\rho_i$  sauf un nombre fini sont nulles sur ce voisinage.
- (ii)  $\sum_{i \in I} \rho_i(x) = 1$

Remarque 1.43 : lorsque  $X$  est une variété, nous dirons qu'une partition de l'unité est de classe  $C^p$  si les  $\rho_i$  sont de classe  $C^p$ .

## Définition 1.44 : partition de l'unité subordonnée à un recouvrement

On appelle *partition de l'unité subordonnée au recouvrement*  $(U_i)_{i \in I}$  de  $X$  une partition de l'unité de  $X$  indexée par le même ensemble  $I$  et telle que pour tout  $i \in I$  le support de  $\rho_i$  est inclus dans  $U_i$ .

## Lemme 1.45

Toute variété différentielle  $M$  admet une base dénombrable dont les éléments ont une adhérence compacte.

## Démonstration :

Soient  $\mathcal{B}$  une base dénombrable de  $M$  et  $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{B}$  ayant une adhérence compacte.

Nous allons vérifier que  $\mathcal{S}$  est encore une base de  $M$ .

Soient  $U$  un ouvert de  $M$  et  $x \in U$ . Comme  $M$  est localement euclidien on peut trouver un ouvert  $V$  de  $M$  dont la fermeture est compacte et vérifiant  $x \in V \subset U$ . Comme  $\mathcal{B}$  est une base, il existe  $B \in \mathcal{B}$  tel que  $x \in B \subset V \subset U$ . Alors  $\overline{B} \subset \overline{V}$  donc  $\overline{B}$  est compact comme fermé d'un compact. Ainsi  $B \in \mathcal{S}$ . Ce qui conclut la preuve. ■

## Proposition 1.46

Toute variété différentielle  $M$  admet une suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'ouverts telle que :

- (i)  $V_0 \subset \overline{V_0} \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset \dots$
- (ii)  $\overline{V_n}$  est compact.
- (iii)  $M = \bigcup_{n \geq 0} V_n$ .

## Démonstration :

D'après le lemme 1.45,  $M$  admet une base dénombrable  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\overline{B_n}$  soit un compact.

Posons  $V_0 = B_0$ , comme  $\overline{B_0}$  est compact il existe  $i_0 > 0$  tel que  $\overline{V_0} \subset B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_{i_0}$ .

Supposons  $(V_0, i_0), \dots, (V_m, i_m)$  construits par récurrence alors comme  $\overline{V_m}$  est compact il existe  $i_{m+1} > i_m$  tel que  $\overline{V_m} \subset B_0 \cup \dots \cup B_{i_{m+1}}$ . Posons  $V_{m+1} = B_0 \cup \dots \cup B_{i_{m+1}}$ . Alors  $\overline{V_{m+1}} = \overline{B_0} \cup \dots \cup \overline{B_{i_{m+1}}}$  est compact comme réunion finie de compacts.

La suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ainsi construite convient. ■

Une partie est relativement compacte lorsque son adhérence est compacte.

#### Définition 1.47 : fonction plateau

Une fonction plateau sur une variété  $M$  de classe  $C^p$  est une fonction de classe  $C^p$  définie sur  $M$  et à valeurs dans  $[0, 1]$  pour laquelle il existe deux ouverts relativement compacts  $U$  et  $V$  avec  $\overline{U} \subset V$  tels que  $\text{supp } f \subset V$  et  $\forall x \in U, f(x) = 1$ .

L'exemple suivant va nous être utile dans la suite :

Exemple 1.48 :

Si  $U$  et  $V$  sont deux boules ouvertes de  $\mathbb{R}^n$  de même centre avec  $\overline{U} \subset V$ , il existe une fonction lisse égale à 1 sur  $U$  et à support inclus dans  $V$ .

Remarquons que l'application réelle  $f(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t^2 - a^2}} & \text{si } |t| < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  est lisse. L'application

$g_a(t) = \frac{\int_{-\infty}^t f_a(u) du}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(u) du}$  est aussi lisse et vaut 0 si  $t \leq -a$  et 1 si  $t \geq a$ .

Il suffit donc de prendre une fonction de la forme  $x \mapsto g_a(b - \|x\|)$ . ■

#### Proposition 1.49

Soit  $U$  un ouvert d'une variété différentielle de classe  $C^p$ . Alors pour tout  $x \in U$ , il existe un ouvert relativement compact  $V$  contenant  $x$  tel que  $\overline{V} \subset U$  et une fonction plateau égale à 1 sur  $V$  et à support inclus dans  $U$ .

Démonstration :

Soit  $(U', \varphi)$  une carte telle que  $x \in U' \subset U$ .

Il existe  $r_1, r_2 > 0$  tels que  $B(\varphi(x), r_1) \subset B(\varphi(x), r_2) \subset \varphi(U')$ .

D'après l'exemple 1.48 il existe une fonction plateau  $g$  de  $\mathbb{R}^n$  qui vaut 1 sur  $B(\varphi(x), r_1)$  et 0 en dehors de  $B(\varphi(x), r_2)$ .

Comme le support de  $g \circ \varphi : U' \rightarrow \mathbb{R}$  est inclus  $\varphi^{-1}(B(0, r_2)) \subset U' \subset U$ ,  $g \circ \varphi$  se prolonge par 0 sur  $M$  en une fonction  $C^p$  dont le support est inclus dans  $U$ .

Et  $B(\varphi(x), r_1) \subset \overline{B(\varphi(x), r_1)} \Rightarrow \varphi^{-1}(B(\varphi(x), r_1)) \subset \varphi^{-1}(\overline{B(\varphi(x), r_1)})$ , comme le terme de droite est un compact comme image continue d'un compact, on en déduit que  $\overline{\varphi^{-1}(B(\varphi(x), r_1))} \subset \varphi^{-1}(\overline{B(\varphi(x), r_1)})$  et donc que  $\overline{\varphi^{-1}(B(\varphi(x), r_1))}$  est compact comme fermé d'un compact. ■

#### Théorème 1.50 : première version

Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert d'une variété différentielle  $M$  de classe  $C^p$ .

Il existe une partition de l'unité  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de classe  $C^p$  et à support compact telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe  $i \in I$  tel que  $\text{supp } \rho_n \subset U_i$ .

Démonstration :

Soit  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie dans 1.46.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall p \in \overline{V_{n+1}} \setminus V_n$  il existe  $i \in I$  tel que  $p \in U_i$ . D'après la proposition 1.49, il existe une fonction plateau  $\Psi_p^n$  de classe  $C^p$  qui vaut 1 sur  $W_p^n$  un voisinage ouvert de  $p$  et dont le support est dans l'ouvert  $U_i \cap (\overline{V_{n+1}} \setminus V_n)$ . Le support  $\text{supp } \Psi_p^n$  est un fermé de  $\overline{V_{n+1}}$  donc un compact.

On obtient donc un recouvrement ouvert  $\{W_p^n, p \in \overline{V_{n+1}} \setminus V_n\}$  du compact  $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$  dont on extrait un sous-recouvrement fini  $\{W_{p_1}^n, \dots, W_{p_{m_n}}^n\}$ .

L'ensemble  $\{\text{supp } \Psi_{p_k}^n, n \in \mathbb{N}, k \in \llbracket 0, m_n \rrbracket\}$  est localement fini puisqu'un nombre fini d'éléments intersectent chaque  $V_n$ .

Pour simplifier les notations, on réindexe cet ensemble en  $\{\Psi_0, \Psi_1, \dots\}$  et on pose  $\Psi = \sum_{n \in \mathbb{N}} \Psi_n$  (la somme est finie en tout point par la remarque qui précède et est strictement positive en tout point).  
Ainsi  $\rho_n = \frac{\Psi_n}{\Psi}$  est une partition de l'unité de classe  $C^p$  de  $M$  telle que pour tout  $n$ , il existe  $i \in I$  tel que  $\text{supp } \rho_n = \text{supp } \Psi_n \subset U_i$ . ■

Si on ne demande plus que la partition de l'unité soit à support compact, on obtient :

**Théorème 1.51 : seconde version**

Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert d'une variété différentielle  $M$  de classe  $C^p$ .  
Il existe une partition de l'unité  $(\rho_i)_{i \in I}$  de classe  $C^p$  subordonnée à  $(U_i)_{i \in I}$ .

Démonstration :

Prenons la partition de l'unité de 1.50. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $\tau(n) \in I$  tel que  $\text{supp } \rho_n \subset U_{\tau(n)}$ .  
Pour tout  $i \in I$ , posons  $\tilde{\rho}_i = \sum_{\tau(n)=i} \rho_n$  (ou 0 s'il n'existe pas de  $n$  tel que  $\tau(n) = i$ ).  
Puis  $\text{supp } \tilde{\rho}_i \subset \bigcup_{\tau(n)=i} \text{supp } \rho_n \subset U_i$ . Donc  $(\tilde{\rho}_i)$  convient. ■

## 1.7 Le théorème de plongement de Whitney

**Définition 1.52 : plongement**

Une application différentiable  $f : M \rightarrow N$  est un plongement si  $f(M)$  est une sous-variété de  $N$  et si  $f : M \rightarrow f(M)$  est un difféomorphisme.

**Caractérisation 1.53**

Une application différentiable  $f : M \rightarrow N$  est un plongement si et seulement si  $f$  est une immersion et si  $f$  est un homéomorphisme sur son image.

Démonstration :

$\Rightarrow$  : immédiat.  
 $\Leftarrow$  : soit  $p \in M$ , alors d'après le théorème d'immersion (1.37), il existe des cartes  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  respectivement de  $M$  et  $N$  telles que  $f$  lue en ces cartes est de la forme  $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ .  
Comme  $f$  est un homéomorphisme sur son image,  $f(U)$  est un ouvert de  $f(M)$ , donc  $f(U) = V' \cap f(M)$  avec  $V'$  un ouvert de  $N$ . Alors  $V \cap V' \cap f(N) = V \cap f(U) = f(U)$  et  $f(U)$  annule les coordonnées  $m+1, \dots, n$ .  
Donc pour tout  $f(p) \in f(M)$ ,  $(V \cap V', (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m))$  est une carte de  $f(M)$  :  $f(M)$  est une sous-variété de  $N$ . ■

Remarque 1.54 : si  $M$  est compacte, il suffit de supposer que  $f$  est une immersion injective.

Le théorème suivant permet de montrer qu'une variété différentielle *abstraite* peut-être vue comme une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  (et n'est donc pas si abstraite). Ce fait sera particulièrement intéressant pour utiliser les propriétés plus familières de  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème 1.55 : de plongement de Whitney**

Toute variété différentielle lisse de dimension  $n$  se plonge sur un fermé de  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

Remarque 1.56 : on peut démontrer, avec une méthode différente et plus compliquée, que toute

variété différentielle de dimension  $n$  se plonge dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . La valeur  $2n$  est cette fois optimale, bien qu'elle puisse être diminuée dans des cas particuliers.

**Lemme 1.57**

Soit  $M$  une variété différentielle lisse de dimension  $n$ .

Pour tout  $m \in M$ , il existe des applications lisses  $\psi_m : M \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f_m : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  telles que  $\psi_m(m) > 0$  et que la restriction de  $f_m$  à l'ouvert  $M \setminus \psi_m^{-1}(0)$  soit un difféomorphisme sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

Démonstration :

Soit  $m \in M$  et  $(U, \varphi)$  une carte en  $m$ . D'après 1.49 il existe une application lisse  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  à support compact inclus dans  $\varphi(U)$  et valant 1 sur un ouvert  $V \subset \varphi(U)$ .

$$\text{On pose } f_m(q) = \begin{cases} h(\varphi(q))\varphi(q) & \text{si } q \in U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Sur l'ouvert  $W = \varphi^{-1}(V)$ ,  $f_m$  coïncide avec  $\varphi$  et donc  $f_m$  est un difféomorphisme de  $W$  sur  $V$ .

Considérons  $\psi_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lisse à support compact inclus dans  $V$  vérifiant  $\psi_0(\varphi(m)) > 0$  et

$$\text{soit } \psi_m(q) = \begin{cases} \psi_0(\varphi(q)) & \text{si } q \in U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \text{ Comme } M \setminus \psi_m^{-1}(0) \subset W, \text{ le lemme est démontré. } \blacksquare$$

**Lemme 1.58**

Toute variété différentielle lisse compacte se plonge dans un espace  $\mathbb{R}^N$ .

Démonstration :

Soit  $M$  une variété différentielle lisse compacte de dimension  $n$ .

Par compacité et avec le lemme précédent, on peut supposer qu'il existe des applications lisses  $\psi_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_j : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  en nombre fini ( $j = 1, \dots, d$ ) avec :

- (i) Les ouverts  $U_j = M \setminus \psi_j^{-1}(0)$  recouvrent  $M$ .
- (ii) Les applications  $f_j|_{U_j}$  sont des difféomorphismes vers des ouverts  $V_j \subset \mathbb{R}^n$ .

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathbb{R}^{nd+d} \\ q & \longmapsto & (f_1(q), \dots, f_d(q), \psi_1(q), \dots, \psi_d(q)) \end{array}.$$

Supposons  $f(q_1) = f(q_2)$ . Par (i), on peut choisir  $j$  tel que  $q_1 \in U_j$ . Alors  $\psi_j(q_2) = \psi_j(q_1)$  et  $q_2 \in U_j$  et donc par (ii),  $q_1 = q_2$ . Donc  $f$  est injective, et par compacité,  $f$  est un homéomorphisme  $M \rightarrow f(M)$ .

Soient  $\pi_1 : \mathbb{R}^{nd+d} \rightarrow \mathbb{R}^n$  la projection sur les  $n$  premières coordonnées et  $\pi_2 : \mathbb{R}^{nd+d} \rightarrow \mathbb{R}^{n(d-1)+d}$  la projection sur les  $n(d-1) + d$  dernières coordonnées. Par (ii),  $\pi_1 \circ f = f_1$  est un difféomorphisme de  $U_j$  sur  $V_1$ . En particulier,  $\pi_1$  est une bijection de  $f(U_j)$  sur  $V_1$ . Donc  $f(U_j)$  est le graphe d'une application lisse  $g_j = \pi_2 \circ f \circ (f_j|_{U_j})^{-1} : V_j \rightarrow \mathbb{R}^{n(d-1)+d}$ .

On définit le difféomorphisme  $h_j : \pi_1^{-1}(V_j) \rightarrow \pi_1^{-1}(V_j)$  par  $h_j(x, y) = (x, y - g_j(x))$  où  $x \in V_j$  et  $y \in \mathbb{R}^{n(d-1)+n}$ . On obtient ainsi une bijection de  $f(U_j)$  sur  $V_j \times 0$ . Comme  $f(U_j)$  est un ouvert de  $f(M)$ ,  $f(U_j) = (M) \cap W_j$  pour un ouvert  $W_j \subset \mathbb{R}^{nd+d}$  que l'on choisit inclus dans  $\pi_1^{-1}(V_j)$ . La restriction  $h_j|_{W_j}$  est un difféomorphisme de  $W_j$  sur un ouvert  $W'_j$ . Donc  $f(M)$  est une sous-variété  $\mathbb{R}^{nd+d}$ .

Comme  $f|_{U_j} : U_j \rightarrow f(U_j)$  est un difféomorphisme (la composée de  $f_j|_{U_j} : U_j \rightarrow V_j$  et de l'inverse du difféomorphisme  $f(U_j) \rightarrow V_j$  induit par  $\pi_1$ ),  $f : M \rightarrow f(M)$  est un difféomorphisme.  $\blacksquare$

**Lemme 1.59**

Toute variété différentielle compacte de dimension  $n$  se plonge dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

Démonstration :

On considère le plongement  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  du lemme précédent. On va montrer que l'on peut obtenir un plongement dans  $\mathbb{R}^{m-1}$  en composant  $f$  avec une projection bien choisie, et ce jusqu'à obtenir un plongement dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

On munit  $\mathbb{R}^m$  de sa structure euclidienne usuelle.

Pour tout vecteur unitaire  $v \in \mathbb{S}^{m-1}$ , on considère la projection  $p_v : x \mapsto x^\perp$  sur l'orthogonal de  $v$  dans  $\mathbb{R}^m$ .

Posons  $N = f(M)$ . Pour que la restriction de  $p_v$  soit injective, il faut et il suffit que pour tous  $x, y \in N$  distincts,  $\frac{y-x}{\|y-x\|}$  soit différent de  $v$ ; ou encore que  $v$  n'appartienne pas à l'image de  $(x, y) \mapsto \frac{y-x}{\|y-x\|}$  de  $N \times N \setminus \Delta$  dans  $\mathbb{S}^{m-1}$ .

D'après le théorème de Sard, il existe de tels  $v$ .

Pour que  $p_v|_N$  soit une immersion, il faut et il suffit que  $v$  n'appartienne à aucun sous-espace tangent à  $N$ .

Introduisons  $Z = \{(x, v) \in M \times \mathbb{S}^{m-1}, v \in T_{f(x)}N\}$ . On vérifie qu'il s'agit d'une sous-variété de dimension  $2n-1$  de  $M \times \mathbb{S}^{m-1}$ . En particulier  $pr_2(Z)$  est de mesure nulle dès que  $2n < m$ .

On conclut : une immersion injective d'une variété différentielle compacte est un plongement. ■

Démonstration du théorème de plongement de Whitney 1.55 :

Soit  $(\rho_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  une partition de l'unité à support compact dénombrable (1.49).

Soit  $h(x) = \sum_{i>0} i\rho_i(x)$ , c'est une application lisse et propre. Soient  $U_i = h^{-1}([i - \frac{1}{4}, i + \frac{5}{4}])$  et  $C_i = h^{-1}([i - \frac{1}{3}, i + \frac{4}{3}])$  alors  $U_i$  est un ouvert,  $C_i$  est un compact et  $U_i \subset \overset{\circ}{C}_i$ . Remarquons que tous les  $C_{2k+i}$  (resp. tous les  $C_{2i}$ ) sont disjoints.

D'après le lemme précédent pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , il existe un application lisse  $g_i : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$  qui est un plongement sur  $\overline{U_i}$  et qui est nulle en dehors de  $C_i$  (et d'image bornée, car l'image d'un compact est compacte et qu'un compact est borné).

Considérons  $f_0 = \sum_i g_{2i+1}$  et  $f_1 = \sum_i g_{2i}$  et  $f = (f_0, f_1, h) : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}$ . Comme  $f_0$  et  $f_1$  sont d'images bornées, il existe un compact  $K$  de  $\mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1}$  tel que  $\text{im } f \subset K \times \mathbb{R}$ .

Ainsi  $f$  est propre puisque  $h$  l'est.

Si  $f(x) = f(y)$  alors  $h(x) = h(y)$  et donc il existe un  $i$  tel que  $x, y \in U_i$ . Si  $i$  est impair,  $f_0$  est un plongement de  $U_i$  et donc  $x = y$ , de même si  $i$  est pair. Donc  $f$  est un plongement sur un fermé (par le caractère propre de  $f$ ).

On utilise alors le même argument que dans le lemme précédent pour se ramener à un plongement dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . ■

## 2

## Formes différentielles

Nous ne traiterons que de formes différentielles de classe  $C^\infty$ .

Il existe une construction alternative à celle présentée ici, qui consiste à définir les formes différentielles comme les sections du fibré des formes alternées sur  $M$ .

## 2.1

## Rappels d'algèbre multilinéaire

Nous rappelons brièvement quelques résultats d'algèbre (pour les démonstrations voir [7] ou [8] par exemples).

Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension finie  $n$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On note  $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$  la base duale de  $\mathcal{B}$ .

Soit  $\mathcal{J}^k(E)$  l'espace vectoriel (sur  $\mathbb{R}$ ) des formes  $k$ -linéaires de  $E$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Remarque 2.1 :  $E^* = \mathcal{J}^1(E)$ .

## Définition 2.2 : produit tensoriel

Si  $S \in \mathcal{J}^k(E)$  et  $T \in \mathcal{J}^l(E)$ , on note  $S \otimes T \in \mathcal{J}^{k+l}(E)$  le *produit tensoriel* de  $S$  par  $T$  défini par  $S \otimes T(v_1, \dots, v_{k+l}) = S(v_1, \dots, v_k)T(v_{k+1}, \dots, v_{k+l})$  où  $v_i \in E$ .

Si  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}\text{-lin}}(E, F)$ , on généralise la notion de transposée en définissant l'application

$${}^t f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}\text{-lin}}(\mathcal{J}^k(F), \mathcal{J}^k(E)) \text{ définie par } {}^t f : \begin{array}{ccc} \mathcal{J}^k(F) & \longrightarrow & \mathcal{J}^k(E) \\ T & \longmapsto & ((v_1, \dots, v_k) \mapsto T(f(v_1), \dots, f(v_k))) \end{array} .$$

## Propositions 2.3

Soient  $S, S' \in \mathcal{J}^k(E)$ ,  $T, T' \in \mathcal{J}^l(E)$ ,  $U \in \mathcal{J}^m(E)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  alors :

- $(S + S') \otimes T = S \otimes T + S' \otimes T$
- $S \otimes (T + T') = S \otimes T + S \otimes T'$
- $(\lambda S) \otimes T = S \otimes (\lambda T) = \lambda(S \otimes T)$
- $S \otimes (T \otimes U) = (S \otimes T) \otimes U$  que l'on notera  $S \otimes T \otimes U$
- $\{e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*, 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}$  est une base de  $\mathcal{J}^k(E)$ .
- En particulier  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{J}^k(E) = n^k$ .
- ${}^t f(S \otimes T) = {}^t f(S) \otimes {}^t f(T)$

Remarque 2.4 : nous avons des propriétés de distributivité et d'associativité du produit tensoriel mais pas de commutativité.

Notons  $\Lambda^k(E) \subset \mathcal{J}^k(E)$  l'espace vectoriel des formes  $k$ -linéaires alternées sur  $E$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ). Par convention  $\Lambda^0(E) = \mathbb{R}$ .

Le produit tensoriel de deux formes multilinéaires alternées n'est pas forcément encore alterné, nous avons donc besoin d'une nouvelle opération : le produit extérieur.

## Définition 2.5 : antisymétrisée d'une forme multilinéaire

On nomme *antisymétrisée* de  $T \in \mathcal{J}^k(E)$ , la forme  $k$ -linéaire alternée  $\text{Alt}(T) \in \Lambda^k(E)$  définie par  $\text{Alt}(T)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$ .

On note  $\mathfrak{S}_k$  le groupe des permutations de  $[[1, k]]$  et  $\varepsilon(\sigma)$  la signature de la permutation  $\sigma$ .

## Propositions 2.6

- Si  $T \in \mathcal{J}^k(E)$  alors  $\text{Alt}(T) \in \Lambda^k(E)$ .
- Si  $\omega \in \Lambda^k(E)$  alors  $\text{Alt}(\omega) = \omega$ .
- Si  $T \in \mathcal{J}^k(E)$  alors  $\text{Alt}(\text{Alt}(T)) = \text{Alt}(T)$ .

## Définition 2.7 : produit extérieur de deux formes multilinéaires alternées

Si  $\omega \in \Lambda^k(E)$  et  $\eta \in \Lambda^l(E)$ , on note  $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+l}(E)$  le *produit extérieur* de  $\omega$  et  $\eta$  défini par  $\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta)$ .

## Propositions 2.8

Soient  $\omega, \omega' \in \Lambda^k(E)$ ,  $\eta, \eta' \in \Lambda^l(E)$ ,  $\theta \in \Lambda^m(E)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors :

- $(\omega + \omega') \wedge \eta = \omega \wedge \eta + \omega' \wedge \eta$
- $\omega \wedge (\eta + \eta') = \omega \wedge \eta + \omega \wedge \eta'$
- $(\lambda\omega) \wedge \eta = \omega \wedge (\lambda\eta) = \lambda(\omega \wedge \eta)$
- $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$
- $\omega \wedge (\eta \wedge \theta) = (\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta)$  que l'on note  $\omega \wedge \eta \wedge \theta$
- $\{e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$  est une base de  $\Lambda^k(E)$ .
- $f_1 \wedge \dots \wedge f_k(v_1, \dots, v_k) = \det(f_i(v_j))$  où les  $f_i$  sont des formes linéaires.
- $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = 1$  si  $i_1 = j_1, \dots, i_k = j_k$ , 0 sinon.
- En particulier  $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^k(E) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
- ${}^t f(\omega)$  est encore alternée et  ${}^t f(\omega \wedge \eta) = {}^t f(\omega) \wedge {}^t f(\eta)$

## Notations 2.9

$$\Lambda E = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k E = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k E$$

Remarque 2.10 : on devrait plutôt noter  $\Lambda E^*$  et  $\Lambda^k E^*$  vu qu'il s'agit de l'algèbre extérieure de  $E^*$ .

## Proposition 2.11

Soient  $x_1 = \sum_{j=1}^n a_{1j} e_j, \dots, x_n = \sum_{j=1}^n a_{nj} e_j$  et  $\omega \in \Lambda^n(E)$  alors  $\omega(x_1, \dots, x_n) = \det(a_{ij}) \omega(e_1, \dots, e_n)$ .

D'après la proposition précédente, la donnée de  $\omega \in \Lambda^n(E) \setminus \{0\}$  partitionne l'ensemble des bases en deux classes : celles où  $\omega(e_1, \dots, e_n) > 0$  et celles où  $\omega(e_1, \dots, e_n) < 0$  (deux bases sont dans la même classe si le déterminant de la matrice de passage est positif). On remarque que ces classes ne dépendent pas du choix de  $\omega$  et une telle classe est nommée *orientation* de  $E$ . On note  $-[e_1, \dots, e_n]$  l'orientation opposée à celle de  $[e_1, \dots, e_n]$ . Dans  $\mathbb{R}^n$ , on nomme *orientation usuelle* l'orientation de la base canonique.

Supposons désormais que  $(E, (\cdot, \cdot))$  est un espace euclidien et soient  $(e_i)$  et  $(e'_i)$  deux bases orthonormées. Alors la matrice de passage  $P$  de  $(e_i)$  à  $(e'_i)$  est orthogonale et donc  $\det P = \pm 1$ . Donc si  $\omega(e_1, \dots, e_n) = \pm 1$  alors  $\omega(e'_1, \dots, e'_n) = \pm 1$  aussi. Donc si une orientation  $\mu$  a été fixée, il existe une unique forme  $\omega \in \Lambda^n(E)$  telle que

$\omega(e_1, \dots, e_n) = 1$  dès que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormale dont  $[e_1, \dots, e_n] = \mu$ . On dit que  $\omega$  est la *forme volume* de  $E$  définie par le produit scalaire et l'orientation  $\mu$ .

Remarque 2.12 : le déterminant est la forme volume de  $\mathbb{R}^n$  pour le produit scalaire usuel et l'orientation usuelle.

## 2.2 Formes différentielles d'une variété

Soit  $M$  une variété différentielle lisse, notons  $\Lambda^k(TM) = \bigsqcup_{x \in M} \Lambda^k(T_x M)$ .

### Définition 2.13 : forme différentielle

Une *k-forme différentielle* (ou une forme différentielle de degré  $k$ ) est une application

$$M \longrightarrow \Lambda^k(TM)$$

$\omega : x \longmapsto \omega_x$  telle que pour tout  $x \in M$ ,  $\omega_x \in \Lambda^k(T_x M)$ .

### Proposition 2.14 : écriture locale

Si  $\omega$  est une  $k$ -forme différentielle sur  $M$  et si  $(U, \varphi)$  est une carte de  $M$  alors  $\omega$  s'écrit de façon unique sur  $U$  :

$$\forall x \in U, \omega_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k}(x) d\varphi_{i_1, x} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k, x}$$

où  $d\varphi_{i, x} = T_x \varphi_i$  et  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{\dim M})$ .

Plus simplement  $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k} d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}$  sur  $U$  avec  $a_{i_1, \dots, i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

### Démonstration :

La famille  $\{d\varphi_{i_1, x} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k, x}, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$  est une base de  $\Lambda^k(T_x M)$  d'après 2.8 en remarquant que  $(d\varphi_{i, x})$  est une base duale de  $T_x M$  (voir remarque 1.32). ■

Remarque 2.15 : en particulier une  $k$ -forme différentielle sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  s'écrit de façon

unique  $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  où  $dx_i = e_i^* : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ .

La régularité des formes différentielles se lit dans les coefficients  $a_{i_1, \dots, i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$ , ainsi une forme différentielle est lisse si pour toutes les cartes, tous les coefficients sont lisses. On peut montrer comme dans la première partie que l'on peut se restreindre aux cartes d'un atlas plutôt qu'à toutes les cartes de l'atlas maximal.

**Attention** : désormais toutes les formes différentielles seront lisses.

### Proposition 2.16 : changement de coordonnées

Si  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  sont deux cartes et si on note  $I = (i_1, \dots, i_k)$  et  $J = (j_1, \dots, j_k)$  alors  $(d\psi_J)_x = \sum_I \det[(d\psi_{j_n}(T_{\varphi(x)}\varphi^{-1}(e_{i_m})))_{m,n}](d\varphi_I)_x$  pour tout  $x \in U \cap V$ .  
Ou encore : sur  $U \cap V$ ,  $d\psi_J = \sum_I a_I d\varphi_I$  où  $a_I(x) = d\psi_J(f_I) = \det[(d\psi_{j_n}(f_{i_m}))_{m,n}]$ .

### Démonstration :

Notons  $f_i = T_{\varphi(x)}\varphi^{-1}(e_i)$  la base de  $T_x M$  associée à la carte  $(U, \varphi)$  et dont la base duale est  $(d\varphi_i)$ .

Sur  $U \cap V$ , on écrit  $\psi_J$  dans les coordonnées de la carte  $(U, \varphi)$ ,  $d\psi_J = \sum_I a_I d\varphi_I$ , donc  $(d\psi_J)_x = \sum_I a_I(x)(d\varphi_I)_x$ . On déduit de 2.8, en appliquant  $f_I$ , que  $a_I(x) = d\psi_J(f_I) = \det[(d\psi_{j_n}(T_{\varphi(x)}\varphi^{-1}(e_{i_m})))_{m,n}]$ . ■

**Notations 2.17**

On note  $\Omega^k(M)$  l'espace vectoriel des  $k$ -formes différentielles lisses sur  $M$ .

On note  $\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k(M) = \bigoplus_{k=0}^{\dim M} \Omega^k(M)$ .

On note  $\Omega_c^*(M)$  les formes différentielles à support compact ( $\text{supp}(\omega) = \overline{\{x, \omega_x \neq 0\}}$ ).

Remarque 2.18 : Comme  $\Lambda^0(T_x M) = \mathbb{R}$ , on a  $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ .

**Définition 2.19 : produit extérieur**

Si  $\omega \in \Omega^k(M)$  et  $\eta \in \Omega^l(M)$  on définit le produit extérieur  $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+l}(M)$  par  $(\omega \wedge \eta)_x = \omega_x \wedge \eta_x$ .

Consistance de la définition :

| On vérifie aisément à l'aide de l'écriture locale que  $\omega \wedge \eta$  est encore lisse. ■

**Propositions 2.20**

Si  $\omega \in \Omega^k(M)$  et  $\eta \in \Omega^l(M)$  alors  $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$ .  
De même, on retrouve les propriétés de distributivité et d'associativité de 2.8.

Remarque 2.21 : si  $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$  alors  $f\omega = f \wedge \omega$ .

Remarques 2.22 :

- L'algèbre  $\Omega^*(M)$  est naturellement graduée pour le produit extérieur : il s'agit une algèbre graduée associative et anticommutative. Il s'agit même d'une algèbre graduée différentielle associative et anticommutative d'après la proposition suivante.
- Si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  alors  $\Omega^*(U) = \{\text{fonctions } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^n\} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^*$  où  $\Omega^*$  est la  $\mathbb{R}$ -algèbre engendrée par les  $dx_1, \dots, dx_n$  avec les relations  $(dx_i)^2 = 0$  et  $dx_i dx_j = -dx_j dx_i$ .
- Plus simplement  $\Omega^*(U)$  est engendrée, en tant qu'algèbre, par  $C^\infty(U)$  et les  $dx_i$ .
- Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , si  $\omega = \sum_{I=1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_I dx_I \in \Omega^k(U)$  et

$$\eta = \sum_{J=1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n} b_J dx_J \in \Omega^l(U) \text{ alors } \omega \wedge \eta = \sum_{I,J} a_I b_J dx_I dx_J \in \Omega^{k+l}(U).$$

**Proposition-définition 2.23 : différentielle extérieure**

Si  $M$  est une variété lisse, il existe une unique application linéaire  $d : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$  telle que :

- (i) Si  $\omega \in \Omega^k(M)$  alors  $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$ .
- (ii) Sur  $\Omega^0(M)$ ,  $d$  est la différentielle des fonctions différentiables.
- (iii) Si  $\omega \in \Omega^k(M)$  alors  $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (d\eta)$  (*antidérivation*).
- (iv)  $d \circ d = 0$

Remarque 2.24 : la notation  $dx_i$  dans le cadre d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  est donc cohérente comme il s'agit de la différentielle extérieure de la 0-forme linéaire «  $i$ -ème coordonnée »  $x_i : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ . De même la notation  $d\varphi_i$  dans une carte locale est aussi cohérente.

Démonstration :

| Commençons par démontrer le résultat dans une carte  $(U, \varphi)$  où  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ .  
D'après le dernier point  $d(d\varphi_i) = 0, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Par récurrence sur  $k$ , à l'aide du troisième point on voit que  $d(d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}) = 0$ .  
Toujours d'après le troisième point et avec la remarque précédente,  $d(fd\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}) = df \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}$ .

Par conséquent si  $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k} d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}$  nécessairement  $d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} da_{i_1, \dots, i_k} \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}$ .

Vérifions qu'une telle formule convient.

Pour les deux premiers points il n'y a pas de soucis. Le troisième point se démontre par le calcul en se rappelant que d'après les propriétés des différentielles des applications,  $d(fg) = (df)g + f(dg)$ .

Le dernier point découle de la symétrie des dérivées secondes.

Il reste à nous ramener à  $M$  en entier à l'aide du lemme suivant :

Lemme

Si  $d$  vérifie les hypothèses de l'énoncé, si  $U$  est un ouvert de  $M$  et si  $\omega, \eta \in \Omega^k(M)$  vérifient  $\omega|_U = \eta|_U$  alors  $(d\omega)|_U = (d\eta)|_U$ .

Soit  $x \in U$ , d'après 1.49 il existe un ouvert  $V$  tel que  $x \in V \subset \bar{V} \subset U$  et  $f$  une fonction plateau lisse à support dans  $U$  et valant 1 sur  $V$ .

Alors  $f \wedge (\omega - \eta) = f(\omega - \eta) = 0$  et  $d(f \wedge (\omega - \eta)) = 0$  par la linéarité.

Ainsi  $0 = df \wedge (\omega - \eta) + f \wedge d(\omega - \eta)$ . Par le second point, comme  $f$  est constante au voisinage de  $x$ ,  $(df)_x = 0$  et comme  $f(x) = 1$ , il reste  $(d\omega)_x = (d\eta)_x$ .

Le résultat étant vrai pour tout  $x$  de  $U$ , on a bien démontré le lemme. ■

Donc si  $x \in U \cap V$  où  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  sont des cartes, comme les écritures locales  $\omega_U = \sum a_I d\varphi_I$  et  $\omega_V = \sum b_J d\psi_J$  coïncident sur  $U \cap V$ , il en est de même pour les différentielles d'après le lemme :  $(d\omega_U)|_{U \cap V} = (d\omega_V)|_{U \cap V}$ . ■

Remarque 2.25 : la démonstration donne la formule locale dans une carte de la différentielle extérieure. En particulier si on travaille dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $d$  est définie par  $df = \sum \frac{df}{dx_i} dx_i$  la différentielle usuelle et  $d(\sum a_I dx_I) = \sum da_I \wedge dx_I$ .

Définitions 2.26 : formes exactes et fermées

Une forme différentielle  $\omega$  est *fermée* si  $d\omega = 0$ .

Une forme différentielle  $\omega$  est *exacte* s'il existe une forme différentielle  $\eta$  telle que  $\omega = d\eta$ .

Remarque 2.27 : comme  $d \circ d = 0$ , une forme différentielle exacte est fermée.

Définition 2.28 : image réciproque

Si  $f : M \rightarrow N$  est une application lisse entre variétés et si  $\omega \in \Omega^k(N)$  alors on définit l'image réciproque de  $\omega$  par  $f$ ,  $f^*\omega \in \Omega^k(M)$  définie par  $(f^*\omega)_x(v_1, \dots, v_k) = \omega_{f(x)}(T_x f(v_1), \dots, T_x f(v_k))$  pour tout  $x \in M$ .

Remarques 2.29 :

- Si  $\omega \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$  alors  $f^*\omega = \omega \circ f$ .
- Avec les notations de la première sous-partie,  $(f^*\omega)_x = {}^t T_x f(\omega_{f(x)})$ .

Proposition 2.30 : linéarité de l'image réciproque

$$\begin{aligned} f^*(\omega + \eta) &= f^*\omega + f^*\eta \\ f^*(\lambda\omega) &= \lambda f^*\omega \end{aligned}$$

**Proposition 2.31**

On a  $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$  et en particulier  $f^*(g\omega) = (g \circ f)f^*(\omega)$ .

Démonstration :

$$\begin{aligned} (f^*(\omega \wedge \eta))_x &= {}^tT_x f(\omega_{f(x)} \wedge \eta_{f(x)}) = {}^t(T_x f)\omega_{f(x)} \wedge {}^t(T_x f)\eta_{f(x)} \text{ d'après 2.8 et } ({}^t(T_x f)\omega_{f(x)} \wedge \\ & {}^t(T_x f)\eta_{f(x)}) = (f^*\omega)_x \wedge (f^*\eta)_x = (f^*\omega \wedge f^*\eta)_x. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque 2.32 : On déduit des deux propositions précédentes que si  $f : M \rightarrow N$  est lisse alors  $f^* : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$  est un morphisme d'algèbres graduées.

**Proposition 2.33**

$(g \circ f)^*\omega = f^*(g^*\omega)$ .

Démonstration :

Évident pour les 0-formes différentielles.

Vrai aussi pour les 1-formes différentielles d'après le théorème de différentiation des fonctions composées.

Donc vrai pour toutes les formes d'après 2.31 (prendre l'écriture locale).  $\blacksquare$

**Corollaire 2.34**

Si  $f$  est un difféomorphisme,  $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$ .

L'image réciproque  $f^*\omega$  est encore une forme différentielle, cependant pour vérifier sa régularité, et donc la consistance de la définition, nous allons avoir besoin du résultat suivant :

**Proposition 2.35 : commutativité de l'image réciproque et de la différentielle extérieure**

Si  $f : M \rightarrow N$  est une application lisse et si  $\omega \in \Omega^k(N)$  alors  $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$ .

Démonstration :

Le résultat est vrai en degré 0 : c'est la différentielle de la composée ( $d(f^*\omega) = d(\omega \circ f)$  et  $(d(\omega \circ f))_x = T_x(\omega \circ f) = T_{f(x)}\omega \circ T_x f = (d\omega)_{f(x)}(T_x f) = (f^*(d\omega))_x$ ).

On procède ensuite par récurrence sur le degré en remarquant que si  $\omega$  est une  $k$ -forme différentielle alors :

$$\begin{aligned} f^*(d(\omega \wedge \eta)) &= f^*(d\omega) \wedge f^*\eta + (-1)^k f^*\omega \wedge f^*(d\eta) \text{ et} \\ d(f^*(\omega \wedge \eta)) &= (d f^*\omega) \wedge f^*\eta + (-1)^k f^*\omega \wedge (d f^*\eta). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ainsi, si  $\omega$  s'écrit localement  $\omega = \sum a_I d\varphi_I$  alors  $f^*(\omega) = \sum a_I \circ f d f_I$  où  $f_i = \varphi_i \circ f$ .

On en déduit que  $f^*\omega$  est encore lisse ( $f_i \in C^\infty \Rightarrow d f_i$  lisse  $\Rightarrow d f_I$  lisse).

Remarque 2.36 : on aurait pu obtenir ce résultat plus tôt ; il suffit d'avoir la linéarité, la compatibilité avec le produit extérieur, le cas de commutativité en degré 0 et de remarquer rapidement que si  $\omega = dg$  avec  $g$  de classe  $C^\infty$  alors  $f^*\omega = d(g \circ f)$ .

**Corollaire 2.37**

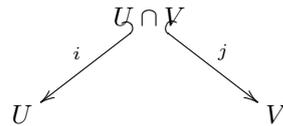
Si  $U$  est un ouvert de  $M$  et si  $\omega \in \Omega^k(M)$  alors  $(d\omega)|_U = d(\omega|_U)$ .

Démonstration :

Il suffit de remarquer que  $\omega|_U = i^*\omega$  où  $i : U \hookrightarrow M$  et d'utiliser la commutativité de la différentielle extérieure et de l'image réciproque.  $\blacksquare$

Remarque 2.38 : une forme différentielle sur  $M$  est une collection de formes  $(\omega_U)$  sur l'atlas,

compatibles au sens où si



alors  $i^*\omega_U = j^*\omega_V$ .

Remarque 2.39 : dans une carte locale on peut utiliser les règles de calcul usuelles d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soient  $f : M \rightarrow N$  une application lisse entre variétés et  $(U, \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n))$  une carte de  $M$  en  $x \in M$ . D'après 1.32,  $(T_{\varphi(x)}(\varphi^{-1})(e_i))_{i=1, \dots, n}$  est une base de  $T_x M$  admettant  $(T_x \varphi_i)_i$  comme base duale. Ainsi, si  $v \in T_x M$ ,  $T_x f(v) = \sum_{i=1}^n T_x f(T_{\varphi(x)}(\varphi^{-1})(e_i)) T_x \varphi_i(v)$  par linéarité.

En posant  $d\varphi_{i,x} = T_x \varphi_i$  et  $\left. \frac{df}{d\varphi_i} \right|_x = T_x f(T_{\varphi(x)}(\varphi^{-1})(e_i))$  alors la différentielle extérieure de  $f$  est  $df = \sum_{i=1}^n \frac{df}{d\varphi_i} d\varphi_i$ . Et si  $\omega = \sum_I f_I d\varphi_I$  alors  $d\omega = \sum_I df_I \wedge d\varphi_I = \sum_I \sum_{i=1}^n \frac{df}{d\varphi_i} d\varphi_i \wedge d\varphi_I$ .

Avec ces notations et en appliquant 2.16 on peut facilement changer de coordonnées : si  $(U, \varphi)$

et  $(V, \psi)$  sont deux cartes alors sur  $U \cap V$ ,  $d\psi_j = \sum_{i=1}^n \frac{d\psi_j}{d\varphi_i} d\varphi_i$  où  $\left. \frac{d\psi_j}{d\varphi_i} \right|_x = d\psi_j(T_{\varphi(x)}\varphi^{-1}(e_i))$ .

De même si dans une carte  $\omega = \sum f_I d\varphi_I$  et  $\eta = \sum f_J d\varphi_J$  alors  $\omega \wedge \eta = \sum f_I f_J d\varphi_I \wedge d\varphi_J$ .

**Proposition 2.40 : functorialité de l'image réciproque**

Nous avons construit un foncteur contravariant  $\Omega^*$  de la catégorie des variétés différentielles lisses dans la catégorie des algèbres graduées associatives et anticommutatives donné sur les objets par  $M \mapsto \Omega^*(M)$  et sur les morphismes par  $f \rightarrow f^*$ .

**Exemple 2.41 : formes différentielles sur le cercle  $\mathbb{S}^1$**

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$$

Soit  $h : t \mapsto (\cos t, \sin t)$ . Alors  $h$  est surjective et comme  $h'(t) = (-\sin t, \cos t)$  est

partout non nul,  $h$  est une submersion (la différentielle est surjective en tout point).

On dit qu'une 1-forme différentielle sur  $\mathbb{R}$  est  $2\pi$ -périodique si elle se met sous la forme  $gdt$  avec  $g$   $2\pi$ -périodique.

Nous allons montrer que pour  $k = 0, 1$ , les  $k$ -formes différentielles sur  $\mathbb{S}^1$  s'identifient aux  $k$ -formes différentielles  $2\pi$ -périodiques sur  $\mathbb{R}$ .

- On remarque d'abord que  $h^* : H^*(\mathbb{S}^1) \rightarrow H^*(\mathbb{R})$  est injective.

**Lemme**

Si  $h : M \rightarrow N$  est une application lisse, est surjective et est une submersion alors le morphisme d'algèbres graduées  $h^* : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$  est injectif.

Soit  $\omega \in \Omega^k(N)$  tel que  $h^*\omega = 0$ . Soient  $p \in N$  et  $v_1, \dots, v_k \in T_p N$ . Comme  $h$  est une surjection, il existe  $\tilde{p} \in M$  tel que  $h(\tilde{p}) = p$ . Comme  $h$  est une submersion, il existe  $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k \in T_{\tilde{p}} M$  tels que  $T_{\tilde{p}} h(\tilde{v}_i) = v_i$ .

Ainsi  $0 = (h^*\omega)_{\tilde{p}}(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k) = \omega_p(v_1, \dots, v_k)$ . Comme  $p$  et les  $v_i$  sont arbitraires,  $\omega = 0$ . ■

- Si  $f \in \Omega^0(\mathbb{S}^1)$  alors  $h^*f = f \circ h$  est  $2\pi$ -périodique vu que  $h$  l'est.
- Réciproquement soit  $f \in \Omega^0(\mathbb{R})$   $2\pi$ -périodique. Soit  $m \in \mathbb{S}^1$ , comme  $h$  est un difféomorphisme local (1.34) il existe  $V$  un voisinage ouvert de  $p$  dans  $\mathbb{S}^1$  et un voisinage  $U$  de  $\mathbb{R}$  tel que  $h|_U : U \rightarrow V$  soit un difféomorphisme, notons  $s$  son inverse. Posons alors  $g = f \circ s$ . On vérifie que  $g$  est bien définie, en effet si  $s'$  est un autre difféomorphisme (on change  $V$ ) alors  $s$  et  $s'$  diffèrent d'un multiple de  $2\pi$ , mais  $f$  est  $2\pi$ -périodique. Nous avons donc bien  $f = g \circ s^{-1} = g \circ h = h^*g$  sur  $h^{-1}(U)$ . En faisant varier  $p \in \mathbb{S}^1$  on obtient  $g$  définie sur  $\mathbb{S}^1$ . Ce qui permet de conclure.

- Comme  $\omega_0 = -ydx + xdy$  est une 1-forme différentielle partout non nulle sur  $\mathbb{S}^1$  (2.63), toute 1-forme différentielle sur  $\mathbb{S}^1$  s'écrit  $\omega = f\omega_0$  avec  $f$  lisse définie sur  $\mathbb{S}^1$  (en chaque point  $m$ ,  $\Lambda^1(T_m\mathbb{S}^1)$  est de dimension 1, puis on regarde la régularité des coefficients). Puis  $h^*(\omega_0) = -(h^*y)d(h^*x) + (h^*x)d(h^*y) = -(\sin t)d(\cos t) + (\cos t)d(\sin t) = \sin^2 t dt + \cos^2 t dt = dt$ . Enfin  $h^*\omega = h^*f h^*\omega_0 = h^*f dt$  qui est  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ .
- Réciproquement si  $f dt \in \Omega^1(\mathbb{R})$  est  $2\pi$ -périodique alors  $f = h^*g$  d'après ce que l'on vient de voir et ainsi  $f dt = h^*g h^*\omega_0 = h^*(g\omega_0)$ .

Donc  $\Omega^0(\mathbb{S}^1) \simeq \{f \text{ } 2\pi\text{-périodique}\} \subset \Omega^0(\mathbb{R})$  et  $\Omega^1(\mathbb{S}^1) \simeq \{f dt, f \text{ } 2\pi\text{-périodique sur } \mathbb{R}\} \subset \Omega^1(\mathbb{R})$  où les isomorphismes sont donnés par  $h^*$ . ■

## 2.3 Orientation d'une variété différentielle

Le but est d'orienter l'espace tangent en chaque point d'une variété différentielle de façon cohérente : il ne faut pas que l'orientation change de façon brutale entre deux points voisins. On parlera alors de l'orientation de la variété différentielle.

### 2.3.1 Premier point de vue : les atlas

#### Définition 2.42 : atlas d'orientation

Un atlas d'une variété différentielle  $M$  dont toutes les applications de changement de cartes  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  ont un jacobien positif est nommé *atlas d'orientation de  $M$* .

Remarque 2.43 : on souhaite orienter  $T_x M$  au moyen de la base  $(T_{\varphi(x)}\varphi^{-1}(e_i))$  où  $(e_i)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Les atlas d'orientation permettent de rendre le résultat cohérent :

#### Proposition 2.44

L'application de changement de cartes  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  a un jacobien positif si et seulement si pour tout  $x \in U_i \cap U_j$ ,  $(T_{\varphi(x)}\varphi^{-1}(e_i))$  et  $(T_{\psi(x)}\psi^{-1}(e_i))$  définissent la même orientation sur  $T_x M$

#### Démonstration :

Le jacobien en  $\varphi_j(x)$  est le déterminant de la matrice de l'application linéaire  $T_{\varphi_j(x)}(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) = T_x \varphi_i \circ T_{\varphi_j(x)} \varphi_j^{-1}$ .  
D'après 1.32, il s'agit de l'application linéaire de changement de bases. ■

#### Définition 2.45 : variété différentielle orientable

Une variété différentielle est orientable si elle admet un atlas d'orientation.

Si  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  et  $\{(V_j, \psi_j)\}$  sont deux atlas d'orientation d'une variété différentielle  $M$ , on définit une application  $s : x \in U_i \cap V_j \mapsto \text{signe}(J(\varphi_i \circ \psi_j^{-1}))$ .

Si  $x \in U'_i \cap V'_j$  appartient à d'autres cartes alors  $(\varphi'_i \circ \varphi_i^{-1}) \circ (\varphi_i \circ \psi_j^{-1}) \circ (\psi_j \circ \psi'_j^{-1}) = \varphi'_i \circ \psi'_j^{-1}$ . Donc  $s$  est bien définie.

L'application  $s$  est localement constante, donc si  $M$  est connexe,  $s$  est constante.

On dit que les deux atlas d'orientation  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  et  $\{(V_j, \psi_j)\}$  ont même orientation si  $s = 1$ . Il s'agit d'une relation d'équivalence. D'après la remarque précédente, si  $M$  est connexe, il y a deux classes d'équivalence, et donc deux orientations.

**Définition 2.46 : orientation d'une variété différentielle**

Une orientation d'une variété différentielle orientable est la donnée d'une classe d'équivalence d'atlas orientables.

**Définition 2.47 : variété différentielle orientée**

Une variété différentielle orientée est la donnée d'une variété différentielle  $M$  et d'une orientation de  $M$ .

**Remarque 2.48 :** On peut faire l'analogie avec le cas vectoriel où l'on regardait le signe du déterminant des matrices de passage. Cependant, contrairement au cas des espaces vectoriels, une variété différentielle peut ne pas admettre d'atlas d'orientation.

**Proposition 2.49**

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles orientées respectivement par les atlas d'orientation  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  et  $\{(V_j, \psi_j)\}$ .

Un difféomorphisme local  $f : M \rightarrow N$  conserve (resp. renverse) l'orientation si les jacobiens des  $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$  sont positifs (resp. négatifs) là où il est défini.

On vérifie aisément, comme précédemment, que les signes des jacobiens ne dépendent que de la classe d'orientation.

**2.3.2****Deuxième point de vue : orientation ponctuelle****Définition 2.50**

Un repère sur un ouvert  $U$  d'une variété différentielle  $M$  est la donnée d'un  $n$ -uplet de champs de vecteurs possiblement discontinus  $(X_1, \dots, X_n)$  tel que pour tout  $m \in M$ ,  $(X_{1,m}, \dots, X_{n,m})$  est une base de  $T_m M$ .

Un repère global est un repère défini sur  $M$ .

Un repère est local en  $m$  s'il est défini sur un voisinage ouvert de  $m$ .

On introduit une relation d'équivalence sur les repères en  $U$  : on dit que deux repères  $(X_1, \dots, X_n)$  et  $(Y_1, \dots, Y_n)$  sont équivalents si en tout point  $m \in U$  les bases  $(X_{1,m}, \dots, X_{n,m})$  et  $(Y_{1,m}, \dots, Y_{n,m})$  définissent la même orientation (ie la matrice de passage est de déterminant positif).

**Définition 2.51 : Orientation ponctuelle**

Une *orientation ponctuelle* est la donnée d'une orientation de  $T_m M$  pour tout point  $m \in M$  : il s'agit d'une classe d'équivalence des repères de  $M$ .

En effet une orientation de  $T_m M$  est fixée par une classe de bases et donc par une base.

Une orientation ponctuelle  $\mu$  est continue en  $m \in M$  s'il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $m$  telle que l'orientation est continue sur  $U$ , ie il existe un repère continu  $(Y_1, \dots, Y_n)$  sur  $U$  qui en tout point de  $U$  donne une base de l'espace tangent compatible avec l'orientation :  $\mu_m = [(Y_{1,m}, \dots, Y_{n,m})]$ .

Une orientation ponctuelle est continue sur  $M$  si elle l'est en tout point.

**Attention :** on ne demande pas l'existence d'un repère continu sur  $M$  mais l'existence en tout point d'un repère continu au voisinage de ce point.

## Lemme 2.52

Une orientation ponctuelle  $[(X_1, \dots, X_n)]$  est continue si et seulement si tout point  $m \in M$  est contenu dans une carte  $(U, \varphi)$  sur laquelle  $(d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n)(X_1, \dots, X_n)$  est strictement positive.

Remarque 2.53 : on peut faire le lien avec le point de vue suivant concernant les formes volumes.

Démonstration :

$\Rightarrow$  : soit  $m \in M$  alors il existe un ouvert  $W$  connexe contenant  $p$  tel que sur  $W$ ,  $[(X_1, \dots, X_n)]$  soit représentée par le repère continue  $(Y_1, \dots, Y_n)$ .

Si  $(U, \varphi)$  est une carte connexe en  $m$ , alors on considère l'application continue  $f : U \rightarrow Gl_n(\mathbb{R})$  où  $f(x)$  est la matrice de changement de bases de  $(T_{\varphi(m)}\varphi^{-1}(e_i))$  dans  $(Y_{1,m}, \dots, Y_{n,m})$ . Alors d'après 2.8  $d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n(Y_1, \dots, Y_n) = (\det f)(d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n)(\partial_1, \dots, \partial_n) = \det f \neq 0$  où  $\partial_{i,m} = T_{\varphi(m)}\varphi^{-1}(e_i)$ .

Par connexité,  $d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n(Y_1, \dots, Y_n)$  est soit toujours positive, soit toujours négative, quite à remplacer la première coordonnée par son opposé, on considère l'application  $d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n(Y_1, \dots, Y_n)$  toujours positive sur  $U$ .

Puisque  $(X_1, \dots, X_n)$  et  $(Y_1, \dots, Y_n)$  représentent la même orientation en tout point alors  $\det g(x) > 0$  où  $g : U \rightarrow Gl_n(\mathbb{R})$  et  $g(x)$  est la matrice de changement de bases de  $(X_{1,m}, \dots, X_{n,m})$  à  $(Y_{1,m}, \dots, Y_{n,m})$ . Ainsi  $(d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n)(X_1, \dots, X_n) = (\det g)(d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n)(Y_1, \dots, Y_n) > 0$  sur  $U$ .

$\Leftarrow$  : avec les notations précédentes où cette fois  $f : M \rightarrow Gl_n(\mathbb{R})$  est définie par  $f(x)$  la matrice de passage de  $(T_{\varphi(m)}\varphi^{-1}(e_i))$  dans  $(X_{1,m}, \dots, X_{n,m})$ , on a sur une carte  $(U, \varphi)$  de l'énoncé,  $0 < d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n(X_1, \dots, X_n) = (\det f)(d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n)(\partial_1, \dots, \partial_n) = \det f \neq 0$  où  $\partial_{i,m} = T_{\varphi(m)}\varphi^{-1}(e_i)$ . Et donc sur  $U$ ,  $[(X_1, \dots, X_n)] = [(\partial_1, \dots, \partial_n)]$ . ■

## Proposition 2.54

Une variété différentielle  $M$  est orientable si et seulement si elle admet une orientation ponctuelle continue.

ie une orientation est la donnée d'une orientation ponctuelle continue.

Démonstration :

$(\Rightarrow)$  Soit  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  un atlas d'orientation. Si  $(U, \varphi)$  une carte de cet atlas, alors pour tout  $m \in U$  on définit  $\mu_m$  comme la classe d'équivalence d'orientation de la base  $(T_{\varphi(m)}\varphi^{-1}(e_i))_i$  où  $(e_i)_i$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $m$  appartient à une autre carte  $(V, \psi)$  alors comme  $\psi \circ \varphi^{-1}$  est de jacobien positif, les bases  $(T_{\varphi(x)}\varphi^{-1}(e_i))_i$  et  $(T_{\psi(x)}\psi^{-1}(e_i))_i$  sont équivalentes à orientation près (on a  $T_{\varphi(m)}\psi \circ \varphi^{-1} = T_m\psi \circ T_{\varphi(m)}\varphi^{-1} \Rightarrow T_{\varphi(m)}\varphi^{-1} = T_{\varphi(m)}(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ T_{\psi(m)}\psi^{-1}$ ).

L'orientation ponctuelle  $\mu$  obtenue est bien continue car elle est représentée sur  $(U, \varphi)$  par un repère continu.

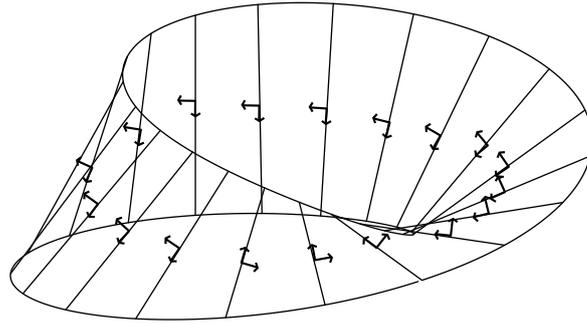
$(\Leftarrow)$  Soit  $[(X_1, \dots, X_n)]$  une orientation ponctuelle continue.

L'atlas obtenu avec les cartes du lemme 2.52 est un atlas d'orientation. En effet si deux cartes  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  s'intersectent, alors sur  $U \cap V$ , on a d'après le lemme  $(d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n)(X_1, \dots, X_n) > 0$  et  $(d\psi_1 \wedge \dots \wedge d\psi_n)(X_1, \dots, X_n) > 0$ , comme  $d\psi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\psi_{j_k} = \text{Jac}(\psi \circ \varphi^{-1})d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}$  d'après 2.16 (en effet  $T_x\psi_j(T_{\varphi(x)}\varphi^{-1}(e_i)) = d_{\varphi(x)}(\psi_j \circ \varphi^{-1})(e_i) = D_{e_i}(\psi_j \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$  et  $\text{Jac}_y(\psi \circ \varphi^{-1}) = \det(D_{e_i}(\psi_j \circ \varphi^{-1})(y))$  quel que soit le  $x$  et donc quel que soit le  $y$ ). Donc  $\text{Jac}(\psi \circ \varphi^{-1}) > 0$  sur  $U \cap V$ .

On a donc un atlas d'orientation. ■

Remarque 2.55 : étant donné un atlas d'orientation  $\{(U, \varphi)\}$ , on obtient l'orientation ponctuelle continue associée par  $U \ni m \mapsto [T_{\varphi(m)}\varphi^{-1}(e_1), \dots, T_{\varphi(m)}\varphi^{-1}(e_n)]$ . Réciproquement, étant donnée une orientation ponctuelle continue  $[(X_1, \dots, X_n)]$ , on obtient un atlas d'orientation en ne prenant que les cartes  $(U, \varphi)$  de l'atlas maximal vérifiant  $(d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n)(X_1, \dots, X_n) > 0$ .

## Exemple 2.56 : ruban de Möbius



Considérons la bande  $R = [0, 1] \times ]-1, 1[$ , on obtient le ruban de Möbius  $M$  en quotientant  $R$  par la relation d'équivalence  $(0, y) \sim (1, -y)$ .

Considérons  $U = ]0, 1[ \times ]-1, 1[$  l'intérieur de la bande, qui est aussi un ouvert de  $M$ .

Supposons que  $M$  soit orientable, alors cette orientation induit une orientation  $(e_1, e_2)$  sur  $U$ . Par continuité, l'orientation en  $(0, 0)$  et en  $(1, 0)$  est encore  $(e_1, e_2)$ . Cependant du fait de l'identification,  $(e_1, -e_2)$  est une autre orientation en  $(0, 0)$ . D'où une contradiction. ■

Remarque 2.57 : si  $M$  est une variété différentielle connexe, on peut retrouver les deux orientations en regardant  $f : m \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_m = \nu_m, \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$  où  $\mu$  et  $\nu$  sont deux orientations

ponctuelles continues.

## 2.3.3

## Troisième point de vue : les formes volumes

## Définition 2.58 : forme volume

Une forme volume sur une variété différentielle  $M$  est une forme différentielle de degré maximal sur  $M$  partout non nulle.

Remarque 2.59 :  $ie \omega_x(v_1, \dots, v_n) \neq 0, \forall x \in M$  et pour toute base  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $T_x M$ .

## Proposition 2.60

Une variété différentielle est orientable si et seulement si elle admet une forme volume.

Démonstration :

( $\Rightarrow$ ) Soit  $[(X_1, \dots, X_n)]$  une orientation ponctuelle continue de  $M$ . D'après le lemme 2.52, tout point  $m$  est contenu dans une carte  $(U, \varphi)$  sur laquelle  $(d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n)(X_1, \dots, X_n) > 0$  (\*).

On obtient ainsi un ensemble  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  de cartes recouvrant  $M$ . Soit  $(\rho_\alpha)$  une partition de l'unité subordonnée à  $\{(U_\alpha)\}$ .

La  $n$ -forme  $\omega = \sum_\alpha \rho_\alpha d\varphi_{\alpha 1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{\alpha n}$  est bien définie et est lisse sur  $M$ .

Comme pour tout  $\alpha$ ,  $\rho_\alpha \geq 0$  et comme il existe au moins un  $m$  tel que  $\rho_\alpha(m) > 0$ , par (\*) on a bien que  $\omega$  est une forme volume.

( $\Leftarrow$ ) Supposons que  $\omega$  soit une forme volume.

Pour tout point  $m$  on choisit  $(X_{1,m}, \dots, X_{n,m})$  une base de  $T_m M$  telle que  $\omega_m(X_{1,m}, \dots, X_{n,m}) > 0$ .

Soit  $m \in M$ . On se donne  $(U, \varphi)$  une carte connexe. Sur  $U$ ,  $\omega = f d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n$  pour  $f$  lisse. Comme  $f$  est continue et ne s'annule nulle part sur un connexe, alors  $f > 0$  ou  $f < 0$  sur  $U$ .

Si  $f > 0$  alors  $(d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n)(X_1, \dots, X_n) > 0$ .

Si  $f < 0$  alors en prenant une nouvelle carte où cette fois  $\varphi_1 = -\varphi_1$ , on obtient  $(d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n)(X_1, \dots, X_n) > 0$ .

On conclut à l'aide du lemme 2.52. ■

Remarque 2.61 : avec l'orientation donnée par la forme volume  $\omega$ , les bases  $(v_1, \dots, v_n)$  directes de  $T_x M$  sont celles qui vérifient  $\omega_x(v_1, \dots, v_n) > 0$ .

Exemple 2.62 :  $\mathbb{R}^n$  est naturellement orienté pour la forme volume  $dx_1 \dots dx_n$ . Cette orientation correspond à l'orientation donnée par l'atlas d'orientation  $\{(\mathbb{R}^n, id)\}$ .

Exemple 2.63 : la sphère  $\mathbb{S}^n$  est orientable

La restriction à  $\mathbb{S}^n$  de la forme  $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^{n+1})$  définie par  $\omega = \sum_{i=0}^n (-1)^i x_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  est partout non nulle puisque si  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base de  $T_x \mathbb{S}^n$  alors  $\omega_x(v_1, \dots, v_n) = \det(x, v_1, \dots, v_n) \neq 0$ . ■

Si  $\omega$  et  $\omega'$  sont deux formes volumes sur  $M$  alors  $\omega' = f\omega$  avec  $f$  de classe  $C^\infty$  ne s'annulant pas (en effet dans une carte locale  $(U, \varphi)$  si  $\omega = g d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n$  et si  $\omega' = h d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n$  alors  $f = g/h$  est bien lisse sur  $U$ ).

Si  $M$  est connexe,  $f$  est soit tout le temps  $> 0$  soit tout le temps  $< 0$ , on retrouve donc les deux orientations :  $\omega \sim \omega' \Leftrightarrow f > 0$ , donc deux formes volumes définissent la même orientation si  $f$  est partout positif. Dans ce cas on note  $[\omega]$  l'orientation induite par  $\omega$  et  $-[\omega]$  l'orientation opposée.

Remarque 2.64 : à une orientation ponctuelle continue on associe de façon biunivoque la classe des formes volumes vérifiant  $\omega(X_1, \dots, X_n) > 0$ .

**Proposition 2.65**

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés respectivement orientées par les formes volumes  $\omega_M$  et  $\omega_N$ . Un difféomorphisme local conserve (resp. renverse) l'orientation si et seulement si  $[f^*\omega_N] = [\omega_M]$  (resp.  $[f^*\omega_N] = [-\omega_M]$ )

Démonstration :

Localement,  $f^*\omega_N = f^*(c d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n) = (c \circ f) \det\left(\frac{df_i}{d\psi_j}\right) d\psi_1 \wedge \dots \wedge d\psi_n$ . ■

### 2.3.4

## Le revêtement d'orientation à deux feuillets

Nous allons montrer qu'une variété différentielle admet un revêtement orientable à deux feuillets. Ce revêtement permet de démontrer certains résultats sur des variétés quelconques en utilisant des résultats sur les variétés orientables (voir par exemple la démonstration du théorème de Künneth, section 3.10).

Soit  $M$  une variété différentielle, on pose  $\overline{M} = \{(p, \mu), p \in M, \mu \in \mathcal{B}_p / \sim\} \simeq M \times \{0, 1\}$  où  $\mathcal{B}_p / \sim \simeq \{0, 1\}$  est l'ensemble de bases de  $T_p M$  quotienté par la relation d'équivalence « le déterminant de la matrice de passage est positif », il s'agit donc de l'ensemble des orientations de  $T_p M$ .

Soit  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  un atlas maximal de  $M$  et pour tout  $\alpha$ , considérons  $\psi_\alpha : \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \overline{M}$  où  $\psi_\alpha(x) = (\varphi_\alpha^{-1}(x), [(T_x \varphi_\alpha^{-1}(e_i))_i])$ . Alors  $\psi_\alpha$  est un homéomorphisme sur son image  $\overline{U}_\alpha$  de réciproque  $\overline{\varphi}_\alpha$ . On peut vérifier que  $\{(\overline{U}_\alpha, \overline{\varphi}_\alpha)\}$  définit une structure différentielle orientable sur  $\overline{M}$ .

On vérifie que l'atlas défini ci-dessus est orientable : si  $x \in \overline{U}_\alpha \cap \overline{U}_\beta$  alors  $[(T_{\varphi(x)} \varphi_\alpha^{-1}(e_i))_i] = [(T_{\psi(x)} \psi^{-1}(e_i))_i]$  et donc  $J(\overline{\varphi}_\alpha \circ \overline{\varphi}_\beta^{-1}) = J(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) > 0$  d'après 2.44.

Nous avons donc obtenu une variété différentielle  $\overline{M}$  orientable et de même dimension que  $M$ .

On vérifie aisément que  $p : \overline{M} \rightarrow M$  est lisse et surjective.

**Proposition 2.66**

L'application lisse  $p : \overline{M} \rightarrow M$  est un revêtement à deux feuillets.

Démonstration :

Soit  $m \in M$  et soit  $(U, \varphi)$  une carte en  $m$  alors  $p^{-1}(U) = V_1 \sqcup V_2$  où les ouverts  $V_1$  et  $V_2$  sont donnés par  $V_1 = \{(p, \mu_p), p \in U\}$  et  $V_2 = \{(p, -\mu_p), p \in U\}$  où  $\mu_p = [(T_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(e_i))_i]$ . Les  $V_i$  sont donc des cartes de  $\overline{M}$  et ainsi  $p|_{V_i} : V_i \rightarrow U$  est un difféomorphisme. ■

Remarque 2.67 : d'après 2.44,  $M$  est orientable si et seulement si  $p$  admet une section globale. Comme  $p$  n'a que deux feuilletés, le revêtement est galoisien et alors posséder une section globale équivaut à être trivial. En particulier toute variété simplement connexe est orientable.

Proposition 2.68

Une variété différentielle  $M$  connexe est orientable si et seulement si son revêtement d'orientation n'est pas connexe.

Remarque 2.69 : Si  $M$  n'est pas connexe,  $\overline{M}$  n'a aucune chance de l'être...

Démonstration :

$\Rightarrow$  : supposons  $M$  orientable. Soit  $\omega$  une forme volume de  $M$ , posons  $M_+ = \{(m, [v_1, \dots, v_n]), \omega_m(v_1, \dots, v_n) > 0\}$  et  $M_- = \{(m, [v_1, \dots, v_n]), \omega_m(v_1, \dots, v_n) < 0\}$  alors  $\overline{M} = M_+ \sqcup M_-$  s'écrit comme réunion disjointe de deux ouverts et n'est donc pas connexe. Moins formellement, on a pris les ensembles  $\{(m, \mu_m)\}$  et  $\{(m, -\mu_m)\}$  où  $\mu_m$  est l'orientation de  $T_m M$  induite par l'orientation de  $M$ .

$\Leftarrow$  : supposons  $\overline{M}$  connexe, alors  $M$  n'est pas orientable. Sinon,  $M_+$  et  $M_-$  ne pourraient être disjoints (un espace tangent  $T_m M$  aurait les deux orientations). ■

## 2.4 Intégration sur une variété différentielle

Il existe une construction alternative à celle présentée ici qui consiste à intégrer les formes différentielles sur des *chaînes singulières* (voir par exemple [7] pour cette construction dans le cas des sous-variétés).

On commence par travailler sur des ouverts  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  que l'on suppose orientés par  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  (ie on oriente  $T_x U = \mathbb{R}^n$  au moyen de sa base naturelle).

Définition 2.70 : intégration sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$

Si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , soit  $\omega \in \Omega_c^n(U)$  alors  $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  et on pose  $\int_U \omega = \int_U f dx_1 \dots dx_n$ .

Proposition 2.71

Soient  $U$  et  $V$  des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $\varphi : U \rightarrow V$  est un difféomorphisme et si  $\omega \in \Omega_c^n(V)$  alors :  $\int_U \varphi^* \omega = \pm \int_V \omega$ .

Démonstration :

En effet si  $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  alors  $\varphi^* \omega = (f \circ \varphi)(\text{Jac } \varphi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ .

Or d'après la formule de changement de variables :

$\int_V f dx_1 \dots dx_n = \int_U (f \circ \varphi) |\text{Jac } \varphi| dx_1 \dots dx_n$ . ■

## Définition-Proposition 2.72 : intégration sur une variété différentielle orientée

Soit  $M$  une variété différentielle orientée de dimension  $n$ , alors il existe une unique application linéaire  $\text{INT} : \Omega_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour toute carte  $(U, \varphi)$  compatible avec l'orientation et pour toute  $n$ -forme  $\omega$  à support compact inclus dans  $U$  alors  $\text{INT}(\omega) = \int_{\varphi(U)} \varphi^{-1*} \omega$ .  
On note  $\int_M \omega = \text{INT}(\omega)$ .

## Démonstration :

Soit  $(\rho_i)_i$  une partition de l'unité subordonnée à l'atlas d'orientation maximal, alors toute forme  $\omega \in \Omega_c^n(M)$  s'écrit  $\omega = \sum_i \rho_i \omega = \sum_i \omega_i$ . Alors nécessairement  $\text{INT}(\omega) = \sum_i \int_{\varphi_i(U_i)} \varphi_i^{-1*} \omega_i$ . D'où l'unicité.

Pour obtenir l'existence, nous devons montrer que cette formule a toujours un sens.

Si  $\omega$  est une  $n$ -forme à support compact inclus dans deux cartes  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  compatibles avec l'orientation alors  $\int_{\varphi(U)} \varphi^{-1*} \omega = \int_{\varphi(U \cap V)} \varphi^{-1*} \omega = \int_{\psi(U \cap V)} (\varphi \circ \psi^{-1})^* (\varphi^{-1*} \omega)$  par la formule de changement de variables car les cartes sont compatibles avec l'orientation (voir la démo de 2.71). Puis  $\int_{\psi(U \cap V)} (\varphi \circ \psi^{-1})^* (\varphi^{-1*} \omega) = \int_{\psi(U \cap V)} \psi^{-1*} \omega = \int_{\psi(V)} \psi^{-1*} \omega$  d'après 2.33. ■

Remarque 2.73 : attention, on doit avoir les caractéristiques suivantes :

- (i) La variété différentielle  $M$  doit être orientée.
- (ii) La forme différentielle doit être de degré maximal.
- (iii) La forme différentielle doit être à support compact.

## Proposition 2.74

Si  $\varphi : M \rightarrow N$  est un difféomorphisme entre variétés différentielles conservant (resp. renversant) l'orientation alors  $\forall \omega \in \Omega_c^n(N)$ ,  $\int_M \varphi^* \omega = \int_N \omega$  (resp.  $\int_M \varphi^* \omega = - \int_N \omega$ ).

Si  $M$  et  $N$  sont deux variétés différentielles orientées pour les formes volumes respectives  $\omega_M$  et  $\omega_N$  alors  $M \times N$  est orienté pour la forme volume  $\omega = p_M^* \omega_M \wedge p_N^* \omega_N$  où  $p_M : M \times N \rightarrow M$  et  $p_N : M \times N \rightarrow N$ . L'orientation obtenue est nommée *orientation produit*. En terme d'atlas, cette orientation revient à prendre le produit de deux atlas d'orientation :  $\{(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j)\}$ .

Si  $\alpha \in \Omega_c^k(M)$  et  $\beta \in \Omega_c^l(N)$ , on note  $\alpha \times \beta$  pour  $p_M^* \alpha \wedge p_N^* \beta$ . Notons que  $\text{supp } \alpha \times \beta \subset \text{supp } \alpha \times \text{supp } \beta$  : il s'agit encore d'une forme à support compact.

## Théorème 2.75 : théorème de Fubini pour les variétés

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles, on munit  $M \times N$  de l'orientation produit. Soient  $\omega \in \Omega^{\dim M}(M)$  et  $\eta \in \Omega^{\dim N}(N)$  alors

$$\int_{M \times N} \omega \times \eta = \int_M \omega \int_N \eta$$

## Démonstration :

À l'aide d'une partition de l'unité, on se ramène au cas où  $M = \mathbb{R}^n$  et où  $N = \mathbb{R}^m$  et alors cela revient à dire que

$$\int_{M \times N} f(x)g(y)dx_1 \dots dx_n dy_1 \dots dy_m = \int_M f(x)dx_1 \dots dx_n \int_N g(y)dy_1 \dots dy_m$$

où  $f$  et  $g$  sont à supports compacts. ■

## 2.5

## Théorème de Stokes

On munit  $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n \geq 0\}$  de la topologie induite. La définition d'une variété différentielle à bord est la même que celle d'une variété différentielle sauf que l'on demande que si  $(U, \varphi)$  est une carte alors  $\varphi(U)$  est un ouvert de  $\mathbb{H}^n$ .

Un point  $m$  d'une variété différentielle avec bord est dans l'intérieur s'il existe une carte  $(U, \varphi)$  avec  $\varphi(m) \in \overset{\circ}{\mathbb{H}^n} = \{x_n > 0\}$  et il est dans le bord de la variété s'il existe une carte  $(U, \varphi)$  avec  $\varphi(m) \in \partial\mathbb{H}^n = \{x_n = 0\}$ .

Ces définitions ne dépendent pas des cartes et sont donc bien définies car si  $(V, \psi)$  est une autre carte alors  $\psi \circ \varphi^{-1}$  est un difféomorphisme envoyant  $\varphi(m)$  sur  $\psi(m)$  et alors ces points sont soit tous les deux dans l'intérieur, soit tous les deux dans le bord de  $\mathbb{H}^n$  d'après le lemme suivant :

## Lemme 2.76

Si  $U$  et  $V$  sont deux ouverts de  $\mathbb{H}^n$  et si  $f : U \rightarrow V$  est un difféomorphisme alors  $f$  envoie un point intérieur sur un point intérieur et un point du bord sur un point du bord.

## Démonstration :

Si  $x \in U$  est un point de l'intérieur de  $\mathbb{H}^n$  alors il existe une boule ouverte  $B$  de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $x$  telle que  $B \subset \overset{\circ}{\mathbb{H}^n}$ . Ainsi  $f(B)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et de  $\mathbb{H}^n$  donc  $f(B) \subset \overset{\circ}{\mathbb{H}^n}$ .

Si  $x \in U \cap \partial\mathbb{H}^n$  alors  $f^{-1} : V \rightarrow U$  est un difféomorphisme et  $f^{-1}(f(p)) = p$  est un point du bord, donc  $f(p)$  ne peut être un point de l'intérieur d'après la première partie de la démonstration. ■

Remarque 2.77 : les notions d'espace tangent, de formes différentielles et d'orientation sont encore valables pour les variétés différentielles à bord.

Notation : on note  $\partial M$  l'ensemble des points du bord d'une variété différentielle à bord  $M$ .

## Proposition 2.78

Si  $M$  est une variété différentielle à bord de dimension  $n$  alors  $\partial M$  est une variété différentielle (sans bord) de dimension  $n - 1$ .

## Démonstration :

Le bord est encore séparé et à base dénombrable.

Soit  $(U, \varphi)$  une carte de  $M$ , on pose alors  $\tilde{\varphi}_U = \varphi_{\partial M \cap U} : U \cap \partial M \rightarrow \varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n-1}$ .

On obtient bien un atlas  $\{(U \cap \partial M), \tilde{\varphi}_U\}$ .

Ainsi  $\partial M$  est une variété lisse sans bord de dimension  $n - 1$ . ■

Nous allons maintenant montrer qu'une orientation sur une variété différentielle à bord induit une orientation sur son bord ce qui permettra d'énoncer le théorème de Stokes (sans souci de signe).

Si  $M$  est une variété différentielle à bord et si  $p \in \partial M$ , on dit qu'un vecteur tangent  $X_p \in T_p M$  pointe vers l'intérieur si  $X_p \notin T_p(\partial M)$  et s'il existe  $\varepsilon > 0$  et une courbe  $c : [0, \varepsilon[ \rightarrow M$  tels que  $c(0) = p$ ,  $c([0, \varepsilon[) \subset \overset{\circ}{M}$ ,  $c'(0) = X_p$ . On dit que  $p$  pointe vers l'extérieur (ou est sortant) si  $-X_p$  pointe vers l'intérieur.

Un champ de vecteurs le long de  $\partial M$  est une application  $X : p \in \partial M \rightarrow X_p \in T_p M$  (et non  $T_p(\partial M)$ ). Dans une carte  $(U, \varphi)$  contenant  $p$ ,  $X$  s'écrit  $X_q = \sum_i a_i(q) T_{\varphi(q)}(\varphi^{-1})(e_i)$ . Un champ de vecteurs le long de  $\partial M$  est dit lisse en  $p$  si  $p$  est contenu dans une carte  $(U, \varphi)$  où les fonctions  $a_i$  sont  $C^\infty$ . Un champ de vecteurs le long de  $\partial M$  est dit lisse s'il est en tout point de  $\partial M$ .

En termes de coordonnées locales, le vecteur  $X_p$  pointe vers l'extérieur si et seulement si  $a_n(p) < 0$ .

On nommera *champ de vecteurs sortant*, un champ de vecteurs le long de  $\partial M$  pointant vers l'extérieur.

**Proposition 2.79**

Une variété différentielle à bord admet un champ de vecteurs sortant lisse.

Démonstration :

Recouvrons  $\partial M$  par des cartes  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  de  $M$ . Sur chaque  $U_\alpha$  le champ de vecteurs  $X_\alpha : x \mapsto -T_{\varphi(x)}(\varphi^{-1})(e_n)$  le long de  $U_\alpha \cap \partial M$  pointe vers l'extérieur et est lisse.

Si on prend une partition de l'unité  $(\rho_\alpha)$  subordonnée au recouvrement  $\{U_\alpha \cap \partial M\}$  alors on peut vérifier que  $X = \sum \rho_\alpha X_\alpha$  le long de  $\partial M$  est lisse et pointe vers l'extérieur. ■

Le produit intérieur est la contraction d'une  $n$ -forme différentielle avec un champ de vecteurs lisse. Ainsi si  $X$  est un champ de vecteurs lisse, on a  $\iota_X : \Omega^n(M) \rightarrow \Omega^{n-1}(M)$  où  $(\iota_X \omega)_p(v_1, \dots, v_{n-1}) = \omega(X_p, v_1, \dots, v_{n-1})$ . C'est une antiderivation :  $\iota_X(\omega \wedge \eta) = (\iota_X \omega) \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge (\iota_X \eta)$ . On a  $\iota_X \iota_Y \omega = -\iota_Y \iota_X \omega \Rightarrow \iota_X^2 = 0$ .

**Proposition-Définition 2.80**

Soit  $M$  une variété différentielle à bord de dimension  $n$ .

Si  $\omega$  est une forme volume sur  $M$  et si  $X$  est un champ de vecteurs sortant lisse alors  $\iota_X \omega$  est une forme volume de  $\partial M$ . Le bord  $\partial M$  est donc orienté.

Démonstration :

Supposons par l'absurde que  $\iota_X \omega$  s'annule en un point  $p \in \partial M$ , ie  $(\iota_X \omega)_p(v_1, \dots, v_{n-1}) = 0$  pour tout  $v_1, \dots, v_{n-1} \in T_p(\partial M)$ .

Soit  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  une base de  $T_p(\partial M)$  alors  $(X_p, e_1, \dots, e_{n-1})$  est une base de  $T_p M$  et  $\omega_p(X_p, e_1, \dots, e_{n-1}) = (\iota_X \omega)_p(e_1, \dots, e_{n-1}) = 0$ .

Or si une forme alternée de degré maximal s'annule sur une base, elle est nulle. Donc  $\omega_p = 0$ . D'où une contradiction. ■

On peut montrer que si  $\omega$  et  $\omega'$  définissent la même orientation alors  $\iota_X \omega$  et  $\iota_X \omega'$  définissent la même orientation. De même l'orientation définie par  $\iota_X \omega$  ne dépend pas du champ de vecteurs sortant  $X$ . L'orientation ainsi obtenue est nommée *orientation sortante*.

**Proposition 2.81**

Soit  $M$  une variété différentielle orientée à bord de dimension  $n$ . Soit  $m \in \partial M$  et soit  $X_p$  un vecteur sortant de  $T_p M$ . Une base  $(v_1, \dots, v_{n-1})$  de  $T_p(\partial M)$  représente l'orientation sortante si et seulement si la base  $(X_p, v_1, \dots, v_{n-1})$  de  $T_p M$  représente l'orientation de  $M$  en  $m$ .

Démonstration :

$$\begin{aligned} (v_1, \dots, v_{n-1}) \text{ représente l'orientation sortante} &\Leftrightarrow (\iota_{X_p} \omega_p)(v_1, \dots, v_{n-1}) > 0 \\ &\Leftrightarrow \omega_p(X_p, v_1, \dots, v_{n-1}) > 0 \\ &\Leftrightarrow (X_p, v_1, \dots, v_{n-1}) \text{ représente l'orientation de } M \end{aligned}$$

**Théorème 2.82 : théorème de Stokes**

Si  $M$  est une variété à bord orientée de dimension  $n$ , alors pour toute  $(n-1)$ -forme à support compact, on a  $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$  ; où on considère l'orientation sortante de  $\partial M$  induite par celle de  $M$  et où  $\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} i^* \omega$  avec  $i : \partial M \hookrightarrow M$ .

Démonstration :

On considère  $(\rho_i)_i$  une partition de l'unité subordonnée à l'atlas maximal d'orientation  $(U_i, \varphi_i)$  et on suppose que le théorème de Stokes est vérifié pour  $M = \mathbb{R}^n$  ou  $M = \mathbb{H}^n$  alors il est vérifié pour tous les ouverts  $U_i$  et on remarque que  $\partial M \cap U_i = \partial U_i$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \omega &= \int_{\partial M} \sum_i \rho_i \omega && \text{(la somme vaut 1 en tout } x) \\ &= \sum_i \int_{\partial M} \rho_i \omega && \text{(la somme est localement finie)} \\ &= \sum_i \int_{\partial U_i} \rho_i \omega && \text{(supp } \rho_i \omega \subset U_i) \\ &= \sum_i \int_{U_i} d(\rho_i \omega) && \text{(théorème de Stokes pour } U_i) \\ &= \sum_i \int_M d(\rho_i \omega) && \text{(supp}(d(\rho_i \omega)) \subset U_i) \\ &= \int_M d\left(\sum_i \rho_i \omega\right) && \text{(la somme est localement finie)} \\ &= \int_M d\omega \end{aligned}$$

Il nous suffit donc de démontrer le résultat pour  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{H}^n$

Commençons par démontrer le résultat pour  $\mathbb{H}^n$ . Par linéarité, il suffit de vérifier les deux cas suivants.

Premier cas :  $\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{n-1}$

$$\begin{aligned} \text{On a } d\omega &= (-1)^{n-1} \frac{df}{dx_n} dx_1 \dots dx_n \text{ et } \int_{\mathbb{H}^n} = (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{df}{dx_n}(x_1, \dots, x_n) = \\ &(-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_0^{+\infty} \frac{df}{dx_n}(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) dx_1 \dots dx_{n-1} = \\ &(-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \dots dx_{n-1}. \end{aligned}$$

Puis comme  $\partial \mathbb{H}^n = (-1)^n \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$  avec son orientation sortante, c'est bien égal à  $\int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega$ .

Second cas :  $\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n$

$$\begin{aligned} \text{On a } d\omega &= (-1)^{i-1} \frac{df}{dx_i} dx_1 \dots dx_n. \text{ Remarquons d'abord que } \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}} \omega = 0. \text{ Ensuite} \\ \int_{\mathbb{H}^n} d\omega &= \pm \int_{\mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}_+} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx_i} dx_i \right) dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n = 0 \text{ puisque comme } f \text{ est à sup-} \\ &\text{port compact, } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx_i} dx_i = 0. \end{aligned}$$

Démontrons maintenant le résultat pour  $\mathbb{R}^n$ .

Par linéarité on peut supposer que  $\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n$ . Alors  $d\omega = (-1)^{i-1} \frac{df}{dx_i} dx_1 \dots dx_n$ . Et  $\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{df}{dx_i}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \frac{df}{dx_i}(x_1, \dots, x_n dx_i) \right) dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n = 0$  mais  $\int_{\partial \mathbb{R}^n} \omega = \int_{\emptyset} \omega = 0$ . ■

**Corollaire 2.83**

Si  $M$  est une variété différentielle orientée (sans bord) de dimension  $n$  et si  $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$  alors  $\int_M d\omega = 0$ .

Remarque 2.84 : Nous verrons une sorte de réciproque en 3.81.

Remarques 2.85 :

- (i) Si  $M = [a, b]$  alors  $\partial M = \{a, b\}$  et on retrouve  $\int_{[a,b]} f'(t) dt = f(b) - f(a)$ .
- (ii) Si  $M$  est un compact de  $\mathbb{R}^2$ , on obtient la formule de Green-Riemann.
- (iii) Si  $M$  est un compact de  $\mathbb{R}^3$ , on obtient la formule de Green-Ostrogradsky.

# 3 Théorie de de Rham

## 3.1 Introduction à la notion de cohomologie

Nous considérons des modules sur un anneau donné  $A$ .

### Définition 3.1 : suite exacte

Une suite (finie ou non) de morphismes de modules  $\cdots \rightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+2} \rightarrow \cdots$  est exacte si  $\ker f_{n+1} = \operatorname{im} f_n$  pour chaque  $n$ .

Une suite exacte de la forme  $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow K \rightarrow 0$  est nommée suite exacte courte.

### Proposition 3.2

Si  $0 \rightarrow E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} E_n \rightarrow 0$  est une suite exacte d'espaces vectoriels de dimension finie alors  $\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim E_i = 0$ .

### Démonstration :

Le résultat se démontre par récurrence. Si  $n = 1$  c'est immédiat. Nous allons aussi avoir besoin du cas  $n = 2$  : considérons la suite exacte  $0 \rightarrow E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \rightarrow 0$  alors  $E_2 \simeq E_1 / \ker f_1$  car  $f_1$  est surjective puis  $\dim E_2 = \dim E_1 - \dim \ker f_1 = \dim E_1 - \dim \operatorname{im} f_0 = \dim E_1 - \dim E_0$  puisque  $f_0$  est injective.

Supposons que le résultat soit vrai pour un certain  $n - 1$  et considérons la suite exacte  $0 \rightarrow E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} E_n \rightarrow 0$ . Commençons par découper la suite de la sorte :  $0 \rightarrow E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} \operatorname{im} f_{n-2} \rightarrow 0$  et  $0 \rightarrow \ker f_{n-1} \rightarrow E_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} E_n \rightarrow 0$ . Alors par hypothèse de récurrence  $\sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \dim E_i + (-1)^{n-1} \dim \operatorname{im} f_{n-2} = 0$  et d'après le cas  $n = 2$ ,  $\dim \ker f_{n-1} - \dim E_{n-1} + \dim E_n = 0$ . On conclut en faisant la somme ou la différence (selon la parité de  $n$ ) de ces deux termes ( $\dim \operatorname{im} f_{n-2} = \dim \ker f_{n-1}$ ). ■

### Proposition 3.3 : lemme des cinq

Considérons un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_2 & \xrightarrow{f_2} & X_3 & \xrightarrow{f_3} & X_4 & \xrightarrow{f_4} & X_5 \\ \downarrow i_1 & & \downarrow i_2 & & \downarrow i_3 & & \downarrow i_4 & & \downarrow i_5 \\ X'_1 & \xrightarrow{f'_1} & X'_2 & \xrightarrow{f'_2} & X'_3 & \xrightarrow{f'_3} & X'_4 & \xrightarrow{f'_4} & X'_5 \end{array}$$

Alors si  $i_2$  et  $i_4$  sont des isomorphismes, si  $i_1$  est surjectif et si  $i_5$  est injectif alors  $i_3$  est un isomorphisme.

En particulier si  $i_1, i_2, i_4$  et  $i_5$  sont des isomorphismes, il en va de même pour  $i_3$ .

### Démonstration :

Il suffit de partir à la chasse dans le diagramme...

• Injectivité de  $i_3$  : soit  $x \in \ker i_3$ . Alors  $0 = f'_3(i_3(x)) = i_4(f_3(x)) \Rightarrow f_3(x) = 0$  par injectivité de  $i_4$ . Donc  $x \in \ker f_3 = \operatorname{im} f_2$ . Ainsi  $x = f_2(y)$  et  $f'_2(i_2(y)) = i_3(f_2(y)) = i_3(x) = 0$ . Donc  $i_2(y) \in \ker f'_2 = \operatorname{im} f'_1$ . Ainsi  $i_2(y) = f'_1(z')$ . Or  $i_1$  est surjective, ainsi  $z' = i_1(z)$ . Puis  $i_2(f_1(z)) = f'_1(i_1(z)) = f'_1(z') = i_2(y)$ . Or  $i_2$  est injective, donc  $y = f_1(z)$ . Ainsi  $x = f_2(y) = f_2(f_1(z)) = 0$  car  $\operatorname{im} f_1 = \ker f_2$ .

Nous mettons les indices en exposant pour différencier des complexes de chaînes.

• Surjectivité de  $i_3$  : soit  $x' \in X'_3$ . Par surjectivité de  $i_4$ ,  $f'_3(x') = i_4(y)$ . Puis comme  $\text{im } f'_3 = \ker f'_4$ ,  $i_5(f_4(y)) = f'_4(i_4(y)) = f'_4(f'_3(x')) = 0$ . Par injectivité de  $i_5$ ,  $f_4(y) = 0$ . Donc  $y \in \ker f_4 = \text{im } f_3$  et  $y = f_3(x)$ . On a  $f'_3(i_3(x)) = i_4(f_3(x)) = i_4(y) = f'_3(x') \Rightarrow f'_3(i_3(x) - x') = 0$ . Ainsi  $i_3(x) - x' \in \ker f'_3 = \text{im } f'_2$  et  $i_3(x) - x' = f'_2(z')$  et par surjectivité de  $i_2$ ,  $z' = i_2(z)$ . Finalement  $i_3(x - f_2(z)) = i_3(x) - i_3(f_2(z)) = i_3(x) - f'_2(i_2(z)) = i_3(x) - f'_2(z') = x'$ . ■

Définition 3.4 : complexe de cochaînes

Un complexe de cochaînes  $C = (C^*, \partial^*)$  est une suite de modules  $(C^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et de morphismes de modules  $(\partial^n : C^n \rightarrow C^{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$  telle que  $\partial^{n+1} \circ \partial^n = 0$  pour tout  $n$ . On nomme *opérateurs de cobord* les  $\partial^n$ . Les éléments de  $C_n$  sont les *cochaînes de degré  $n$* , les éléments de  $Z^n(C) = \ker \partial^n$  sont les *cocycles de degré  $n$*  et les éléments de  $B^{n+1}(C) = \text{im } \partial^n$  sont les *cobords de degré  $n$* .

Remarque 3.5 :  $\partial^{n+1} \circ \partial^n = 0 \Rightarrow B^n(C) \subset Z^n(C)$ .

Les morphismes de complexes de cochaînes sont les applications de degré 0 commutant aux opérateurs différentiels, au sens où une application de degré  $p$  est de la forme  $f^n : C^n \rightarrow D^{n+p}$ . La composition se fait alors de la façon suivante : si  $f^*$  de degré  $p$ , si  $g^*$  de degré  $q$  alors  $h^* = g^* \circ f^*$  de degré  $p + q$  où  $h^n = g^{n+p} \circ f^n$ .

Définition 3.6 : morphisme de complexes de cochaînes

Un morphisme de complexes de cochaînes  $\varphi^* : C \rightarrow D$  est une suite  $(\varphi^n : C^n \rightarrow D^n)_{n \in \mathbb{N}}$  de morphismes de  $A$ -modules telle que  $\partial^n \circ \varphi^n = \varphi^{n+1} \circ \partial^n$  pour tout  $n$ , ie le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial^{n-1}} & C^n & \xrightarrow{\partial^n} & C^{n+1} & \xrightarrow{\partial^{n+1}} & \dots \\ & & \downarrow \varphi^n & & \downarrow \varphi^{n+1} & & \\ \dots & \xrightarrow{\partial^{n-1}} & D^n & \xrightarrow{\partial^n} & D^{n+1} & \xrightarrow{\partial^{n+1}} & \dots \end{array}$$

On définit ainsi la catégorie  $K(A)^*$  des complexes de cochaînes de  $A$ -modules : les objets sont les complexes de cochaînes de  $A$ -modules, les morphismes sont les morphismes de complexes de cochaînes.

Définition 3.7 : sous-complexes de cochaînes

Soit  $C$  un complexe de cochaînes. Soit pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  un sous-module  $D^n \subset C^n$ . Dès lors que l'on a pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  la propriété de stabilité  $\partial^n(D^n) \subset D^{n+1}$ ,  $\partial^*$  se factorise par  $i^*$  où  $i^n : D^n \hookrightarrow C^n$  et définit  $\tilde{\partial}^*$  par la formule  $i^n \circ \tilde{\partial}^n = \partial^n \circ i^n$ . On obtient un complexe de cochaînes  $D = (D^*, \tilde{\partial}^*)$  nommé sous-complexe de  $C$ . L'application  $i^* : D \rightarrow C$  est un morphisme de complexes de cochaînes.

Un complexe de cochaînes est une suite  $\dots \xrightarrow{\partial^{n-2}} C^{n-1} \xrightarrow{\partial^{n-1}} C^n \xrightarrow{\partial^n} C^{n+1} \xrightarrow{\partial^{n+1}} \dots$  presque exacte au sens où  $B^n(C) = \text{im } \partial^{n-1} \subset Z^n(C) = \ker \partial^n$ . La cohomologie consiste à mesurer le défaut d'exactitude de cette suite.

Étant donné  $C^*$  un complexe de cochaînes on nomme  $n$ -ème module de cohomologie le module quotient  $H^n(C) = Z^n(C)/B^n(C)$ . La suite du complexe est exacte si et seulement si  $H^n(C) = 0$  pour tout  $n$ , on dit dans ce cas que  $C$  est acyclique. Ce module mesure donc l'obstruction d'un cocycle à être un cobord.

Comme un morphisme  $\varphi^* : C \rightarrow D$  de complexes de cochaînes envoie un cocycle sur un cocycle et un cobord sur un cobord, il induit pour tout  $n$  un morphisme de modules  $H^n(\varphi^*) : H^n(C) \rightarrow H^n(D)$ . On a donc pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , un foncteur  $H^n : K(A)^* \rightarrow A\text{-mod}$ .

**Définition 3.8 : quasi-isomorphisme**

Un morphisme  $\varphi$  de complexes de cochaînes est un quasi-isomorphisme si pour tout  $n$ ,  $H^n(\varphi)$  est un isomorphisme.

Une suite exacte courte de complexes de cochaînes  $0 \rightarrow C \xrightarrow{\varphi^*} D \xrightarrow{\psi^*} E \rightarrow 0$  est la donnée de complexes de cochaînes  $C, D, E$  et de morphismes de complexes de cochaînes  $\varphi^* : C \rightarrow D, \psi^* : D \rightarrow E$  tels que pour tout  $n$  la suite de modules  $0 \rightarrow C^n \xrightarrow{\varphi^n} D^n \xrightarrow{\psi^n} E \rightarrow 0$  soit exacte. Ce qui revient à demander l'égalité des sous-complexes suivants  $\text{im } \varphi^* = \ker \psi^*$  où  $\text{im } \varphi^* = (\text{im } \varphi^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $\ker \psi^* = (\ker \psi^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .

**Proposition 3.9**

Une suite exacte courte de complexes de cochaînes  $0 \rightarrow C \xrightarrow{\varphi^*} D \xrightarrow{\psi^*} E \rightarrow 0$  induit une suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \hookrightarrow & H^{n+1}(C) & \longrightarrow & \dots & & \\
 & & \searrow & & \delta^n & & \\
 & \hookrightarrow & H^n(C) & \xrightarrow{H^n(\varphi)} & H^n(D) & \xrightarrow{H^n(\psi)} & H^n(E) \\
 & & \searrow & & \delta^{n-1} & & \\
 & & & & \dots & \longrightarrow & H^{n-1}(E)
 \end{array}$$

Démonstration :

Commençons par construire  $\delta^n : H^n(E) \rightarrow H^{n+1}(C)$  :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & C^{n+1} & \xrightarrow{\varphi^{n+1}} & D^{n+1} & \xrightarrow{\psi^{n+1}} & E^{n+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow \partial^n & & \uparrow \partial^n & & \uparrow \partial^n & & \\
 0 & \longrightarrow & C^n & \xrightarrow{\varphi^n} & D^n & \xrightarrow{\psi^n} & E^n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & 
 \end{array}$$

Soit  $z \in E^n$  un  $n$ -cocycle, par surjectivité de  $\psi^n$ , il existe  $y \in D^n$  tel que  $z = \psi^n(y)$ . Comme  $\psi^{n+1}(\partial^n y) = \partial^n \psi^n(y) = \partial^n z = 0$ , ie  $\partial^n y \in \ker \psi^{n+1} = \text{im } \varphi^{n+1}$ , il existe  $x \in C^{n+1}$  tel que  $\partial^n y = \varphi^{n+1}(x)$ . Ce  $x$  est unique (une fois  $y$  fixé) du fait de l'injectivité de  $\varphi^{n+1}$ . Alors  $\varphi^{n+2}(\partial^{n+1}(x)) = \partial^{n+1}(\varphi^{n+1}(x)) = \partial^{n+1}\partial^n y = 0$ . Par injectivité de  $\varphi^{n+1}$ , on a  $\partial^{n+1}x = 0$ . Donc  $x$  est un  $(n+1)$ -cocycle.

Vérifions que la classe de cohomologie de  $x$  ne dépend pas du choix de  $y$ . Soit  $y' \in D^n$  convenant aussi et  $x'$  se déduisant du choix de  $y'$ . Ensuite  $0 = \psi^n(y - y') \Rightarrow y - y' \in \ker \psi^n = \text{im } \varphi^n \Rightarrow y - y' = \varphi^n(a) \Rightarrow \varphi^{n+1}(x - x') = \partial^n(y - y') = \partial^n \varphi^n(a) = \varphi^{n+1}(\partial^n a) \Rightarrow x - x' = \partial^n a$  par injectivité de  $\varphi^{n+1}$ . En notant  $\delta^n(z)$  la classe de cohomologie de  $x$ , on a bien une application  $A$ -linéaire  $\delta^n : Z^n(E) \rightarrow H_{n+1}(C)$ .

Il nous reste à vérifier que  $\delta^n$  annule les cobords pour passer au quotient en une application  $\delta^n : H^n(E) \rightarrow H^{n+1}(C)$ .

Supposons que  $z = \partial^{n-1}c$  et soit  $c = \psi^{n-1}(b)$  par surjectivité. Alors  $\psi^n(\partial^{n-1}b) = \partial^{n-1}\psi^{n-1}(b) = \partial^{n-1}c = z$ . Alors pour construire  $\delta^n z$  on pose  $y = \partial^{n-1}b$  mais alors  $\varphi^{n+1}(x) = \partial^n y = \partial^n \partial^{n-1}c = 0$ . Donc  $x = 0$  par injectivité de  $\varphi^{n+1}$ .

Vérifions l'exactitude en  $H^{n+1}(C)$  pour fixer les idées :

- $H^{n+1}(\varphi) \circ \delta^n = 0$ . Soit  $z \in E$  un  $n$ -cocycle. Soient  $x$  et  $y$  de la construction de  $\delta^n$ . Alors  $H^{n+1}(\varphi) \circ \delta^n([z]) = [\varphi^{n+1}(x)] = [\partial^n y] = 0$ .

- $\ker H^{n+1}(\varphi) \subset \text{im } \delta^n$ . Soit  $x \in C^{n+1}$  un  $(n+1)$ -cocycle. Dire que  $H^{n+1}(\varphi)([x]) = 0$  revient à dire que  $[\varphi^{n+1}(x)] = 0$  ie que  $\varphi^{n+1}(x)$  est un cobord de  $D^{n+1}$ . Donc si  $[x] \in \ker H^{n+1}(\varphi)$ , il existe  $y \in Z^n(D)$  tel que  $\varphi^{n+1}(x) = \partial^n y$ . Posons  $z = \psi^n(y)$  alors  $\partial^n z = \partial^n \psi^n(y) = \psi^{n+1}(\partial^n y) = \psi^{n+1}(\varphi^{n+1}(x)) = 0$ .  
Par définition de  $\delta^n$ ,  $\delta^n([z]) = [x]$ . ■

**Définition 3.10 : homotopie de complexes de cochaînes**

Deux morphismes de complexes de cochaînes  $\varphi^*, \psi^* : C^* \rightarrow D^*$  sont homotopes s'il existe une application  $K : C^* \rightarrow D^*$  de degré  $-1$  (ie  $K^n : C^n \rightarrow D^{n-1}$ ) vérifiant pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $K^{n+1}d^n + d^{n-1}K^n = \psi^n - \varphi^n$ .  
L'application  $K$  est nommée *homotopie* de  $\varphi$  à  $\psi$  (ou *opérateur d'homotopie*).

Remarque 3.11 : il s'agit d'une relation d'équivalence :

- Réflexivité :  $\varphi^* \sim \varphi^*$ , il suffit de prendre  $K^* = 0$ .
- Symétrie :  $\varphi^* \sim \psi^* \Rightarrow \psi^* \sim \varphi^*$ , il suffit de prendre  $L^* = -K^*$ .
- Transitivité :  $\varphi^* \sim \psi^*$  et  $\psi^* \sim \chi^* \Rightarrow \varphi^* \sim \chi^*$  en posant  $L^* = K_1^* + K_2^*$ .

**Proposition 3.12**

Si  $\varphi^*, \psi^* : C^* \rightarrow D^*$  sont deux morphismes de complexes de cochaînes homotopes alors pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a  $H^n(\varphi) = H^n(\psi)$ .

Démonstration :

- Soit  $x$  un  $n$ -cocycle alors  $\psi^n(x) - \varphi^n(x) = d^{n-1}K(x)$  et donc  $\varphi^n(x)$  et  $\psi^n(x)$  diffèrent d'un cobord et donc  $[\varphi^n(x)] = [\psi^n(x)]$  dans  $H^n(D)$ . ■

**Corollaire 3.13**

Si  $id : C^* \rightarrow C^*$  est homotope à 0 alors  $C^*$  est acyclique.

Démonstration :

- On a  $H^n(id) = id$  puisqu'il s'agit d'un foncteur, mais aussi  $H^n(id) = H^n(0) = 0$ . Donc  $id_{H^n(C)} = 0$ , et donc  $H^n(C) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . ■

**Corollaire 3.14**

Si  $f^* : C^* \rightarrow D^*$  et  $g^* : D^* \rightarrow C^*$  sont deux morphismes de complexes de cochaînes tels que  $f \circ g \sim id$  et  $g \circ f \sim id$  (on dit que  $C^*$  et  $D^*$  ont même type d'homotopie) alors pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $H^n(C) \simeq H^n(D)$ .

## 3.2

On rappelle que toutes les variétés différentielles sont supposées lisses.

## Cohomologie de de Rham

Soit  $M$  une variété différentielle, alors l'algèbre graduée  $\Omega^*(M)$  est un complexe de cochaînes :  $0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \dots$   
On parle du complexe de *de Rham*. Les cocycles sont les formes différentielles fermées et les cobords les formes différentielles exactes.

On nomme *n-ème espace de cohomologie de de Rham de M* l'espace vectoriel  $H_{DR}^n(M) = Z^n(\Omega^*(M))/B^n(\Omega^*(M)) = \{n\text{-formes fermées}\}/\{n\text{-formes exactes}\}$ . On pourra noter  $H^n(M)$  au lieu de  $H_{DR}^n(M)$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Remarque 3.15 : si  $f$  est une application lisse, alors  $f^*$  est un morphisme de complexes de cochaînes et passe donc à la cohomologie. Le foncteur contravariant  $\Omega^*$  va donc de la catégorie

des variétés différentielles lisses dans la catégorie  $K(\mathbb{R})^*$  des complexes de cochaînes sur  $\mathbb{R}$ .

Exemples :

$$(i) H^n(\{\text{point}\}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

(ii)  $\ker d^0 \cap \Omega^0(\mathbb{R}) = \{\text{fonctions constantes}\}$  donc  $H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . Sur  $\Omega^1(\mathbb{R})$ ,  $\ker d^1 = \Omega^1(\mathbb{R})$  et si  $\omega = g(x)dx \in \text{im } d^0$  alors en posant  $f = \int_0^x g(u)du$ , on trouve  $df = \omega$ . Donc toute 1-forme différentielle sur  $\mathbb{R}$  est exacte. Ainsi  $H^1(\mathbb{R}) = 0$ .

(iii) Nous généraliserons à l'aide du lemme de Poincaré :  $H^n(\mathbb{R}^p) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$ .

**Lemme 3.16**

L'image réciproque envoie une forme fermée sur une forme fermée et une forme exacte sur une forme exacte.

Ainsi l'image réciproque passe à la cohomologie.

**Proposition 3.17**

Deux variétés différentielles difféomorphes ont même cohomologie.

Démonstration :

| Par functorialité de l'image réciproque. ■

**Proposition 3.18**

Soit  $M$  une variété différentielle, si  $p > \dim M$  alors  $H^p(M) = 0$ .

Démonstration :

| Posons  $n = \dim M$  et soit  $p > n$ . En tout point  $m \in M$ ,  $T_m M$  est de dimension  $n$ . Donc si  $\omega$  est une  $p$ -forme différentielle alors  $\omega_p \in \Lambda^p(T_m M) = \{0\}$  d'après 2.8. ■

**Lemme 3.19**

- Le produit extérieur de deux formes fermées est une forme fermée.
- $[\omega \wedge \eta]$  ne dépend pas du choix du représentant de  $[\omega]$  ou du choix du représentant de  $[\eta]$ .

Ainsi le produit extérieur passe à la cohomologie et induit une structure d'algèbre graduée différentielle, associative et anticommutative :

$$H^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{\dim M} H^k(M)$$

Remarques 3.20 :

- On a même, en utilisant la propriété d'antidérivation du produit extérieur, que  $Z^*(M)$  est un sous-anneau de  $\Omega^*(M)$  et que  $B^*(M)$  est un idéal de  $Z^*(M)$ .
- Si  $f : M \rightarrow N$  est lisse alors  $f^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$  est un morphisme d'algèbres graduées.

**Proposition 3.21**

Si  $M$  est une variété différentielle ayant  $c$  composantes connexes alors  $H^0(M) \simeq \mathbb{R}^c$ .  
 Un élément de  $H^0(M)$  est un  $c$ -uplet dont chaque coordonnée représente une application constante sur une composante connexe.  
 Plus généralement,  $H^0(M) \simeq \mathbb{R}^{\{\text{comp. connexes}\}}$ .

Démonstration :

Puisqu'il n'y a pas de 0-forme exacte,  $H^0(M) = Z^0(M) = \{0\text{-formes fermées}\}$ . Si  $f \in Z^0(M)$ , ie  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $df = 0$ . Dans une carte locale  $(U, \varphi)$ ,  $df = \sum_{i=1}^n \frac{df}{d\varphi_i} d\varphi_i = 0 \Rightarrow \forall i, \frac{df}{d\varphi_i} = 0$  sur  $U$ . Donc  $f$  est localement constante sur  $U$ . Donc les 0-formes fermées sur  $M$  sont les applications localement constantes sur  $M$ . ■

Remarque 3.22 : comme une variété admet une base dénombrable, le nombre de composantes connexes est au plus dénombrable.

Exemple 3.23 : cohomologie de de Rham de  $\mathbb{S}^1$

Comme  $\mathbb{S}^1$  est connexe,  $H^0(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}$ .

Commençons par remarquer que comme  $\mathbb{S}^1$  est de dimension 1, toutes les 1-formes différentielles sont fermées, ainsi  $\Omega^1(\mathbb{S}^1) = Z^1(\mathbb{S}^1)$ .

On considère l'application linéaire  $\varphi : \begin{array}{ccc} \Omega^1(\mathbb{S}^1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \int_{\mathbb{S}^1} \omega \end{array}$ .

Posons aussi  $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ \theta & \longmapsto & (\cos \theta, \sin \theta) \end{array}$ .

- L'application  $\varphi$  est surjective, en effet si  $\omega_0 = -ydx + xdy$  alors  $h^*\omega_0 = d\theta$ . Ainsi  $\int_{\mathbb{S}^1} \omega_0 = \int_{h([0,2\pi])} \omega_0 = \int_{[0,2\pi]} h^*\omega_0 = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \neq 0$ .
- D'après le théorème de Stokes  $B^1(\mathbb{S}^1) \subset \ker \varphi$  : les 1-formes exactes sont dans le noyau.
- Montrons l'inclusion réciproque. Supposons  $\omega \in \ker \varphi$ . On a  $\int_{\mathbb{S}^1} \omega = \int_{[0,2\pi]} h^*\omega$  et  $h^*\omega = f(t)dt$  avec  $f$   $2\pi$ -périodique d'après l'identification 2.41.

**Lemme**

Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est lisse,  $2\pi$ -périodique et vérifie  $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$  alors il existe  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lisse,  $2\pi$ -périodique telle que  $f dt = dg$ .

Posons  $g(t) = \int_0^t f(u)du$ . Comme  $f$  est  $2\pi$ -périodique,  $g(t + 2\pi) = \int_0^{t+2\pi} f(u)du = \int_0^{2\pi} f(u)du + \int_{2\pi}^{t+2\pi} f(u)du = 0 + \int_0^t f(u)du = g(t)$ . Et  $dg = g' dt = f dt$ . ■

Donc  $f dt = dg$  avec  $g$   $2\pi$ -périodique. D'après l'identification 2.41,  $g = h^*\eta$ .

Ainsi  $dg = d(h^*\eta) = h^*(d\eta)$  mais aussi  $dg = f dt = h^*\omega$ . Par l'identification ( $h^*$  injectif),  $\omega = d\eta$ . Donc  $\omega$  est exacte.

Ainsi d'après le théorème d'isomorphisme  $H^1(\mathbb{S}^1) = Z^1(\mathbb{S}^1)/B^1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}$ .

De plus un générateur de  $H^1(\mathbb{S}^1)$  est la classe d'une 1-forme différentielle  $\omega$  vérifiant  $\int_{\mathbb{S}^1} \omega \neq 0$ . ■

Remarques 3.24 :

- Nous verrons en 3.52 comment obtenir ce résultat facilement à l'aide de la suite de Mayer-Vietoris.
- La méthode employée dans la démonstration précédente se généralise : voir 3.81.

Exemple 3.25 : cohomologie de de Rham d'une union disjointe

Soit  $M$  une variété différentielle, soit  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$  des ouverts disjoints de  $M$  alors

$$H^* \left( \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right) \simeq \prod_{\alpha \in A} H^*(U_\alpha).$$

En effet  $i_\alpha : U_\alpha \hookrightarrow \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha$  induit un morphisme  $i_\alpha^* : \Omega^* \left( \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right) \rightarrow \Omega^*(U_\alpha)$  et on montre

$$\text{aisément que } i^* : \begin{array}{ccc} \Omega^* \left( \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right) & \longrightarrow & \prod_{\alpha \in A} \Omega^*(U_\alpha) \\ \omega & \longmapsto & (i_\alpha^* \omega)_\alpha \end{array} \text{ est un isomorphisme d'algèbres gra-}$$

duées.

$$\text{Cet isomorphisme induit l'isomorphisme } i^* : \begin{array}{ccc} H^* \left( \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right) & \longrightarrow & \prod_{\alpha \in A} H^*(U_\alpha) \\ [\omega] & \longmapsto & ([i_\alpha^* \omega])_\alpha \end{array}.$$

D'où le résultat.

$$\text{En particulier nous avons aussi que : } H^p \left( \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right) \simeq \prod_{\alpha \in A} H^p(U_\alpha). \quad \blacksquare$$

Remarque 3.26 : si l'union est finie, ce résultat se démontre aussi facilement à l'aide de la suite de Mayer-Vietoris.

### 3.3 Cohomologie de de Rham à support compact

Nous allons maintenant nous intéresser au cas du support compact. On remarque que si  $M$  est une variété différentielle alors  $\Omega_c^*(M)$  est un complexe de cochaînes (c'est même une algèbre graduée différentielle puisque  $\text{supp}(\omega \wedge \eta) \subset \text{supp} \omega \cap \text{supp} \eta$ ). On note  $H_c^n(M)$  les espaces (vectoriels) de cohomologie de ce complexe.

Remarque 3.27 : si  $M$  est une variété différentielle compacte alors  $\Omega_c^*(M) = \Omega^*(M)$  et  $H_c^*(M) = H^*(M)$ .

Exemples :

- (i)  $H_c^n(\{\text{point}\}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$
- (ii)  $H_c^0(M) = \mathbb{R}^{\{\text{comp. connexes compactes}\}}$ .

(iii) Comme il n'y a pas, sur  $\mathbb{R}$ , de fonction constante non nulle à support compact,  $H_c^0(\mathbb{R}) = 0$ .  
 Considérons maintenant  $\int_{\mathbb{R}} : \Omega_c^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , cette application est clairement surjective. Montrons que  $\ker \int_{\mathbb{R}} = \text{im } d^0$  alors par passage au quotient nous aurons  $H_c^1(\mathbb{R}) = \Omega_c^1(\mathbb{R}) / \ker \int_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ . Si  $g(x)dx \in \ker \int_{\mathbb{R}}$ , on pose  $f = \int_{-\infty}^x g(u)du$  et  $f \in \Omega_c^0(\mathbb{R})$  (Attention, si  $g(x)dx$  n'est pas d'intégrale nulle alors l'application  $f$  n'est pas à support compact). Alors  $df = g(x)dx$ , donc  $\ker \int_{\mathbb{R}} \subset \text{im } d^0$ . Réciproquement si  $df = f'(x)dx \in \text{im } d^0$  alors  $\int_{\mathbb{R}} df = f(b) - f(a) = 0$  en prenant le support strictement dans  $[a, b]$ .

- (iv) De même, nous généraliserons :  $H_c^n(\mathbb{R}^p) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

Remarque 3.28 : si  $\omega \in \Omega_c^*(M)$  et si  $\eta \in \Omega_c^*(M)$  alors  $\omega \wedge \eta \in \Omega_c^*(M)$  (puisque  $\text{supp}(\omega \wedge \eta) \subset \text{supp} \omega \cap \text{supp} \eta$ ). Ainsi le produit extérieur passe à la cohomologie à support compact et  $H_c^*(M)$  est naturellement munie d'une structure d'algèbre graduée.

Attention! On ne peut pas définir de foncteur  $\Omega_c^*$  comme précédemment du fait que l'image réciproque d'une forme à support compact n'est pas forcément à support compact. Nous pouvons alors obtenir un foncteur de deux façons :

- (i) On reprend la construction de  $\Omega^*$  en se restreignant aux applications propres et on obtient un foncteur contravariant  $\Omega_c^*$ .

Une application est propre si l'image réciproque d'un compact est un compact.

(ii) On construit un foncteur covariant  $\Omega_c^*$  pour l'inclusion des ouverts : si  $U$  est un ouvert de  $M$  et si  $i : U \hookrightarrow M$ , on pose alors  $i_* : \Omega_c^*(U) \rightarrow \Omega_c^*(M)$  qui étend une forme différentielle par 0.

Cette seconde construction (et principalement l'aspect covariant) nous servira, par exemples, pour la suite de Mayer-Vietoris à support compact ou pour la dualité de Poincaré. Donc, à partir de maintenant,  $\Omega_c^*$  désigne le foncteur covariant du second point.

**Exemple 3.29 : cohomologie de de Rham à support compact d'une union disjointe**

Soit  $M$  une variété différentielle, soit  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$  des ouverts disjoints de  $M$  alors

$$H_c^* \left( \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right) \simeq \bigoplus_{\alpha \in A} H_c^*(U_\alpha).$$

En effet,  $i_\alpha : M_\alpha \hookrightarrow \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha$  induit un morphisme  $i_{\alpha*} : \Omega_c^*(M_\alpha) \rightarrow \Omega_c^* \left( \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right)$  qui permet

de construire le morphisme d'algèbres graduées  $i_* : \bigoplus_{\alpha \in A} \Omega_c^*(M_\alpha) \rightarrow \Omega_c^* \left( \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right)$  donné

par  $i_* \left( \sum_{\nu=1}^p \omega_{\alpha_\nu} \right) = \sum_{\nu=1}^p i_{\alpha_\nu*} \omega_{\alpha_\nu}$  dont on vérifie qu'il s'agit d'un isomorphisme (une forme différentielle sur l'union disjointe, ne peut être à support compact si elle est non nulle sur un nombre infini d'ouverts de l'union).

On en déduit le résultat. ■

**Remarque 3.30 :** si l'union est finie, ce résultat se démontre aussi facilement à l'aide de la suite de Mayer-Vietoris, et est à rapprocher de 3.25.

### 3.4 Invariance par homotopie (ou lemme de Poincaré)

**Définition 3.31**

Deux applications lisses entre variétés différentielles  $f, g : M \rightarrow N$  sont *différentiablement homotopes* s'il existe  $F : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$  lisse telle que  $f = F(\cdot, \leq 0)$  et  $g = F(\cdot, \geq 1)$ . Il s'agit d'une relation d'équivalence.

**Théorème 3.32 : invariance par homotopie différentielle ou lemme de Poincaré**

Si  $f, g : M \rightarrow N$  sont deux applications lisses différentiablement homotopes alors  $f^* = g^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$ .

**Démonstration :**

Posons  $M \rightarrow M \times \mathbb{R}$   
 $x \mapsto (x, t)$ , alors  $f = F \circ i_0$  et  $g = G \circ i_1$ . Par functorialité de l'image

réciproque  $f^* = i_0^* \circ F^* : H^n(N) \rightarrow H^n(M)$  et  $g^* = i_1^* \circ G^* : H^n(N) \rightarrow H^n(M)$ . Pour montrer l'égalité voulue il suffit donc de montrer que  $i_0^* = i_1^* : H^n(M \times \mathbb{R}) \rightarrow H^n(M)$ . Pour cela nous allons montrer que  $i_0^*, i_1^* : \Omega^*(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^*(M)$  sont des morphismes de complexes de cochaînes homotopes puis il suffira d'appliquer 3.12.

Nous nous sommes donc ramenés à la construction d'un opérateur d'homotopie  $K$  où  $K^n : \Omega^n(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{n-1}(M)$  et  $K^{n+1}d^n + d^{n-1}K^n = i_1^n - i_0^n (*)$ .

$M \times \mathbb{R} \rightarrow T(M \times \mathbb{R}) = TM \oplus T\mathbb{R}$   
 Considérons le champ de vecteurs  $T = \frac{d}{dt} : (m, x) \mapsto (0, x)$ . Alors

si  $\omega \in \Omega^n(M \times \mathbb{R})$ , la contraction  $\iota_{T\omega} \in \Omega^{n-1}(M \times \mathbb{R})$  et donc  $\tilde{\omega} = i_t^*(\iota_{T\omega}) \in \Omega^{n-1}(M)$ . Remarquons ensuite que si  $\tilde{\omega}^t \in \Omega^{n-1}(M)$  est une forme différentielle dépendant de  $t$  alors  $\int_0^1 \tilde{\omega}^t dt \in \Omega^{n-1}(M)$  (écrire  $\tilde{\omega}$  localement dans une carte). Ainsi on peut définir  $K$  de la façon suivante : si  $\omega \in \Omega^n(M \times \mathbb{R})$  alors  $K^n \omega = \int_0^1 i_t^*(\iota_{T\omega}) dt \in \Omega^{n-1}(M)$ .

Remarquons ensuite que toute forme  $\omega \in \Omega^n(M \times \mathbb{R})$  s'écrit de façon unique  $\omega = \alpha + \beta \wedge dt$  où  $\alpha \in \Omega^n(M \times \mathbb{R})$  et  $\beta \in \Omega^{n-1}(M \times \mathbb{R})$  sont de la forme  $p^*\eta$  où  $p : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  et  $\eta \in \Omega^*(M)$ , ie  $\alpha$  et  $\beta$  n'ont en aucun point un terme en  $dt$ .

Il nous reste à vérifier que  $K$  vérifie la propriété (\*) sur les formes différentielles de la forme  $\alpha$  puis sur ceux de la forme  $\beta dt$ .

• Soit  $\eta \in \Omega^n(M)$ , pour une carte  $(U, \varphi)$  de  $M$ ,  $\alpha = p^*\eta = \sum_{I=(i_1, \dots, i_n)} f_I(x, t) p^* d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge$

$p^* d\varphi_{i_n}$ . On peut donc supposer  $\alpha = f(x, t) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$ .

Tout d'abord  $\iota_T \alpha = 0$  donc  $dK^{n+1}\alpha = 0$ . Puis  $K^{n+1}(d\alpha) = K^{n+1}\left(\frac{df}{dt} dt \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} + \text{termes sans } dt\right) = K^{n+1}\left(\frac{df}{dt} dt \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}\right) = \left(\int_0^1 \frac{df}{dt} dt\right) dt dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} = (f(x, 1) - f(x, 0)) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} = i_1^* \alpha - i_0^* \alpha$ . D'où le résultat.

• Soit  $\beta = p^*\eta \wedge dt$ . Comme précédemment, localement, on peut supposer  $\beta = f(x, t) dt \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  comme forme différentielle sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Par calculs on trouve  $K^{n+1}(d\omega) = -d(K^n \omega)$ . Mais comme  $i_0^* dt = i_1^* dt = 0$ , (\*) est vraie. ■

Nous allons maintenant utiliser l'invariance par homotopie différentielle pour voir l'invariance topologique de la cohomologie de de Rham : deux variétés différentielles homéomorphes (ou plus fort, ayant même type d'homotopie) ont la même cohomologie. Ce résultat est surprenant car il nous indique que la cohomologie de de Rham d'une variété différentielle ne dépend que de sa structure topologique alors que la construction est intimement liée à la structure différentielle de la variété.

#### Lemme 3.33

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles.

- Toute application continue de  $M$  dans  $N$  est continûment homotope à une application lisse.
- Deux applications lisses  $f, g : M \rightarrow N$  continûment homotopes sont différentiablement homotopes.

On admet ce lemme (voir par exemples [3], [6] ou [1]-§17.8).

#### Lemme 3.34

Une application continue entre variétés différentielles  $f : M \rightarrow N$  induit un morphisme  $f^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$ .

#### Démonstration :

Soit  $f : M \rightarrow N$  une application continue, alors il existe  $f' : M \rightarrow N$  lisse continûment homotope à  $f$ .

On pose  $f^* = f'^*$ .

Alors  $f^*$  est bien définie : en effet si  $f'' : M \rightarrow N$  lisse est aussi continûment homotope à  $f$  alors  $f'$  et  $f''$  sont continûment homotopes et donc différentiablement homotopes et donc  $f'^* = f''^*$ . ■

#### Lemme 3.35

Si  $f : M \rightarrow N$  et  $g : N \rightarrow P$  sont continues entre variétés différentielles alors  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ .

#### Démonstration :

Si  $f$  est homotope à l'application lisse  $f'$  et si  $g$  est homotope à l'application lisse  $g'$  alors on vérifie que  $g \circ f$  est homotope à l'application lisse  $g' \circ f'$ . ■

**Théorème 3.36 : invariance topologique de la cohomologie de de Rham**

Si  $f : M \rightarrow N$  est une équivalence d'homotopie (au sens  $C^0$ ) alors  $f^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$  est un isomorphisme.

**Corollaire 3.37**

Deux variétés ayant le même type d'homotopie (au sens  $C^0$ ) ont même cohomologie.

**Corollaire 3.38**

Deux variétés différentielles homéomorphes ont même cohomologie.

Exemples 3.39 :

(i) Si  $M$  est le ruban de Möbius, alors on a un retract de  $M$  sur son cercle médiant  $\mathbb{S}^1$ , ainsi

$$H^n(M) = H^n(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{se calcule aussi avec la suite de Mayer-Vietoris})$$

(ii)  $H^n(\mathbb{R}^p) = H^n(\{\text{point}\}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

**Corollaire 3.40**

Si  $U$  est un ouvert étoilé de  $\mathbb{R}^p$  alors  $U$  a le type d'homotopie du point et  $H^n(U) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . Donc toute forme fermée est exacte.

Remarque 3.41 : on montre le résultat plus général suivant

Soit  $Y \subset \mathbb{R}^n$  et soient  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  continues telles que pour tout  $x \in X$ , le segment joignant  $f_0(x)$  à  $f_1(x)$  est contenu dans  $Y$ , alors  $f_0$  et  $f_1$  sont homotopes.

$$\begin{array}{ccc} X \times [0, 1] & \longrightarrow & Y \\ \text{Il suffit de considérer } (x, t) & \longmapsto & (1-t)f_0(x) + tf_1(x) . \end{array} \quad \blacksquare$$

Application 3.42 : théorème de Brouwer

Si  $n \neq m$  alors  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$  ne sont pas homéomorphes.

En effet, si  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$  étaient homéomorphes, on pourrait supposer l'existence d'un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  dans  $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ . Or on sait que ces variétés différentielles n'ont pas la même cohomologie (voir 3.54).  $\blacksquare$

## 3.5 Lemme de Poincaré à support compact

**Proposition 3.43 : lemme de Poincaré, version à support compact**

Soit  $M$  une variété différentielle alors  $H_c^n(M \times \mathbb{R}) \simeq H_c^{n-1}(M)$ .

Démonstration :

Nous allons réaliser une démonstration similaire à la précédente.

Remarquons d'abord que toute forme différentielle à support compact sur  $M \times \mathbb{R}$  s'écrit comme combinaison linéaire de termes de la forme  $f(x, t)p^*\eta$  et  $f(x, t)p^*\eta \wedge dt$  où  $\eta \in \Omega^*(M)$  (pas forcément à support compact),  $f$  lisse à support compact et  $p : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ .

On définit  $\Pi_*$  de la façon suivante  $\Pi_n : \Omega_c^n(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_c^{n-1}(M)$  où  $\Pi_n(f(x, t)p^*\eta) = 0$  et  $\Pi_n(f(x, t)p^*\eta \wedge dt) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t)dt\eta$ .

•  $\Pi_*$  commute aux différentielles,  $d\Pi_* = \Pi_*d$ , et passe donc à la cohomologie  $\Pi_n : H_c^n(M \times \mathbb{R}) \rightarrow H_c^{n-1}(M)$ .

• Soit  $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lisse d'intégrale 1, et soit  $e_*$  défini par  $e_n : \Omega_c^n(M) \rightarrow \Omega_c^{n+1}(M \times \mathbb{R})$  et  $e_n(\omega) = p^*\omega \wedge e(t)dt$ . De même  $e_*$  commute aux opérateurs différentiels et induit une application  $e_n : H_c^n(M) \rightarrow H_c^{n+1}(M \times \mathbb{R})$ .

• Nous allons désormais construire un opérateur d'homotopie entre  $e_*$  et  $\Pi_*$ . Posons  $K_*$  défini par  $K_n : \Omega_c^n(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_c^{n-1}(M \times \mathbb{R})$  avec  $K_n(f(x, t)p^*\eta) = 0$  et  $K_n(f(x, t)p^*\eta \wedge dt) = p^*\eta \left( \int_{-\infty}^t f \right) - p^*\eta A(t) \int_{-\infty}^{+\infty} f$  où  $A(t) = \int_{-\infty}^t e$ .

Nous allons montrer que  $id - e_{n-1}\Pi_n = (-1)^{n-1}(d^{n-1}K_n - K_{n+1}d^n)$  sur  $\Omega_c^n(M \times \mathbb{R})$ , ce qui permettra de conclure comme dans 3.12.

• Sur les formes du type  $f(x, t)p^*\eta$  avec  $\deg \eta = n$ . Alors  $(id - e_{n-1}\Pi_n)(f(x, t)p^*\eta) = f(x, t)p^*\eta$ .

Pour l'autre terme,  $(d^{n-1}K_n - K_{n+1}d^n)(f(x, t)p^*\eta) = -K_{n+1}d^n(f(x, t)p^*\eta) = -K_{n+1}\left(\frac{df}{dt}dt \wedge p^*\eta + \text{termes sans } dt\right) = -K_{n+1}\left((-1)^n \frac{df}{dt}p^*\eta \wedge dt\right) = (-1)^{n+1} \left( p^*\eta \int_{-\infty}^t \frac{df}{dt} - p^*\eta A(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{dt} \right) = (-1)^{n+1} p^*\eta f(x, t)$  puisque  $f$  est à support compact. D'où le résultat.

• Sur les formes du type  $f(x, t)p^*\eta \wedge dt$  avec  $\deg \eta = n - 1$ . Alors  $(id - e_{n-1}\Pi_n)(f(x, t)p^*\eta \wedge dt) = f(x, t)p^*\eta \wedge dt - p^*\eta \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f \right) \wedge e(t)dt$ .

Pour l'autre terme :

$$\begin{aligned} (d^{n-1}K_n)(f(x, t)p^*\eta \wedge dt) &= d^{n-1} \left( p^*\eta \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f \right) - p^*\eta A(t) \int_{-\infty}^{+\infty} f \right) \\ &= p^*(d^{n-1}\eta) \int_{-\infty}^t f + (-1)^{n-1} p^*\eta f(t) + (-1)^{n-1} p^*\eta \int_{-\infty}^t \frac{df}{dx} dx \\ &\quad - p^*(d^{n-1}\eta) A(t) \int_{-\infty}^{+\infty} f \\ &\quad - (-1)^{n-1} p^*\eta \left[ e(t)dt \int_{-\infty}^{+\infty} f + A(t) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{dx} \right) dx \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (K_{n+1}d^n)(f(x, t)p^*\eta \wedge dt) &= K_{n+1} \left( p^*(d\eta) \wedge f(x, t)dt + (-1)^{n-1} p^*\eta \wedge \frac{df}{dx} dx \wedge dt \right) \\ &= p^*(d\eta) \int_{-\infty}^t f - p^*(d\eta) A(t) \int_{-\infty}^{+\infty} f \\ &\quad + (-1)^{n-1} \left[ p^*\eta \left( \int_{-\infty}^t \frac{df}{dx} \right) dx - p^*\eta A(t) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{dx} \right) dx \right] \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure. ■

Remarque 3.44 : la dualité de Poincaré permet de retrouver ce résultat (voir 3.78).

Exemple 3.45 : cohomologie à support compact de  $\mathbb{R}^p$

$$H_c^n(\mathbb{R}^p) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ici le morphisme  $H_c^p(\mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}$  est obtenu en itérant  $\Pi_*$ , ie par intégration sur  $\mathbb{R}^p$ .

Nous allons déterminer un générateur de  $H_c^p(\mathbb{R}^p)$  : on commence par prendre 1 la fonction constante que l'on itère avec  $e_*$ . On obtient  $e(x_1)dx_1 \wedge e(x_2)dx_2 \wedge \dots \wedge dx_p$ . Un générateur de  $H_c^p(\mathbb{R}^p)$  est donc une forme différentielle de la forme  $\alpha(x)dx_1 \dots dx_p$  avec  $\int_{\mathbb{R}^p} \alpha(x)dx_1 \dots dx_p = 1$ . Le support de  $\alpha$  peut être choisi aussi petit que souhaité. ■

Remarque 3.46 : on en déduit que la cohomologie à support compact n'est pas invariante par homotopie.

Application 3.47 : le degré d'une application propre

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application propre  $C^\infty$  alors  $f^* : H_c^n(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_c^n(\mathbb{R}^n)$  est bien définie. Par la dimension, ce morphisme envoie un générateur (une forme fermée à support compact d'intégrale 1) sur un multiple du générateur. On nomme ce multiple le degré de  $f$ .

Donc si  $\alpha$  est un générateur,  $f^*\alpha = (\deg f)\alpha \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f^*\alpha = \deg f$ .

A priori ce nombre est un réel, nous allons voir qu'il s'agit en fait d'un entier.

On rappelle que  $p$  est un point critique de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  si  $T_p f : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^m$  n'est pas surjectif, on dit alors que  $f(p)$  est la valeur critique. En particulier un point  $x \notin \text{im } f$  est une valeur régulière.

Nous admettons le théorème suivant :

**Théorème de Sard**

L'ensemble des valeurs critiques d'une application lisse  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est de mesure nulle.

Premier cas : si  $f$  n'est pas surjective alors  $\deg f = 0$

Si  $f$  est propre alors  $\text{im } f$  est fermée, donc si  $x \notin \text{im } f$  alors il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  tel que  $\text{im } f \cap U = \emptyset$ , si on prend  $\alpha$  un générateur à support dans  $U$  alors  $f^*\alpha = 0 \Rightarrow \deg f = 0$ .

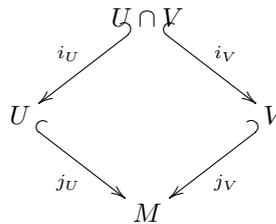
Second cas : si  $f$  est surjective

D'après le théorème de Sard presque tous les points de l'image sont des valeurs régulières. Soit  $x \in \text{im } f$  une valeur régulière alors  $T_x f$  est surjective (et donc un isomorphisme car la dimension est finie), d'après le théorème d'inversion locale  $f$  est un difféomorphisme local en  $x$ , donc  $f^{-1}(x)$  est discret. Comme  $f$  est propre alors  $f^{-1}(x)$  est fini.

Si  $\alpha$  est un générateur à support dans le voisinage de  $x$  alors  $f^*\alpha$  est une  $n$ -forme différentielle proche de  $f^{-1}(x)$ . Comme un difféomorphisme conserve l'intégrale au signe près, l'intégrale de  $f^*\alpha$  au voisinage d'un point de  $f^{-1}(x)$  vaut  $\pm 1$  et donc  $\deg f = \int_{\mathbb{R}^n} f^*\alpha = \sum_{f^{-1}(x)} \pm 1$ . ■

### 3.6 Suites de Mayer-Vietoris

Dans toute cette partie nous considérerons une variété différentielle  $M$  recouverte par deux ouverts  $U$  et  $V : M = U \cup V$ . Nous utiliserons les notations suivantes pour les inclusions :



Remarque 3.48 : si  $i : A \hookrightarrow B$  est une inclusion alors  $i^* : \Omega^*(B) \rightarrow \Omega^*(A)$  est la restriction des formes différentielles.

**Proposition 3.49** : la suite exacte courte de Mayer-Vietoris

Soit  $M$  une variété différentielle recouverte par deux ouverts  $U$  et  $V$  alors la suite de Mayer-Vietoris  $0 \rightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{\alpha} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{\beta} \Omega^*(U \cap V) \rightarrow 0$  où

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega^n(M) & \longrightarrow & \Omega^n(U) \oplus \Omega^n(V) & \longrightarrow & \Omega^n(U \cap V) \\
 \alpha^n : \omega & \longmapsto & (j_U^* \omega, j_V^* \omega) & \text{et } \beta^n : & (\omega, \eta) \longmapsto i_U^* \omega - i_V^* \eta
 \end{array}$$

est exacte.

Démonstration :

- $\ker \alpha^n = 0$  : évident.
- $\text{im } \alpha^n = \ker \beta^n$  :  $\beta^n(j_U^* \omega, j_V^* \omega) = (j_U \circ i_U)^* \omega - (j_V \circ i_V)^* \omega = i_{U \cap V}^* \omega - i_{U \cap V}^* \omega = 0$  où  $i_{U \cap V} : U \cap V \hookrightarrow M$ . Donc  $\text{im } \alpha^n \subset \ker \beta^n$ .  
Réciproquement si  $(\omega, \eta) \in \ker \beta^n$  alors  $i_U^* \omega = i_V^* \eta$  donc  $\eta$  et  $\omega$  coïncident sur  $U \cap V$ , on peut donc poser la forme différentielle sur  $M$   $\theta_x = \begin{cases} \omega_x & \text{si } x \in U \\ \eta_x & \text{si } x \in V \end{cases}$  et alors  $(\omega, \eta) = \alpha^n \theta$ .  
D'où le résultat.
- Surjectivité de  $\beta^n$  : soit  $\{\rho_U, \rho_V\}$  une partition de l'unité subordonnée au recouvrement  $M = U \cup V$ . Soit  $\omega \in \Omega^n(U \cap V)$ , posons  $\eta_x = \begin{cases} \rho_V(x) \omega_x & \text{si } x \in U \cap V \\ 0 & \text{si } x \in U \setminus \text{supp } \rho_V \end{cases}$  sur  $U$  et  $\theta_x = \begin{cases} -\rho_U(x) \omega_x & \text{si } x \in U \cap V \\ 0 & \text{si } x \in V \setminus \text{supp } \rho_U \end{cases}$  sur  $V$  alors  $\eta \in \Omega^n(U)$  et  $\theta \in \Omega^n(V)$  et  $\omega = \beta^n(\eta, \theta)$ . ■

On déduit de la proposition précédente et de 3.9 la suite exacte longue de cohomologie suivante :

**Corollaire 3.50 : suite exacte longue de Mayer-Vietoris**

Si  $M$  est une variété différentielle recouverte par deux ouverts  $U$  et  $V$  alors on a la suite exacte longue suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \rightarrow & H^{n+1}(M) & \longrightarrow & \cdots & & \\
 & & \searrow & & \delta^n & & \\
 & \rightarrow & H^n(M) & \xrightarrow{\alpha} & H^n(U) \oplus H^n(V) & \xrightarrow{\beta} & H^n(U \cap V) \\
 & & \searrow & & \delta^{n-1} & & \\
 & & & & \cdots & \longrightarrow & H^{n-1}(U \cap V)
 \end{array}$$

**Remarque 3.51 :** les applications  $\alpha$  et  $\beta$  passent au quotient. Nous allons brièvement donner  $\delta^n$  en suivant la construction dans 3.9. Soit  $\omega \in \Omega^n(U \cap V)$  une forme différentielle fermée alors d'après la démonstration précédente  $\omega = \beta^n(\xi)$  où  $\xi = (\rho_V \omega, -\rho_U \omega) \in \Omega^n(U) \oplus \Omega^n(V)$ . Comme  $d\omega = 0$  et par commutativité du diagramme  $d^n \beta^n = \beta^{n+1} d^n$ , on a  $\beta^{n+1} d^n \xi = d^n \beta^n \xi = d^n \omega = 0$  ie  $d(\rho_V \omega)$  et  $-d(\rho_U \omega)$  coïncident sur  $U \cap V$ . Puis  $d\xi = \alpha^{n+1}(\eta)$  où  $\eta = \begin{cases} d(\rho_V \omega) & \text{sur } U \\ -d(\rho_U \omega) & \text{sur } V \end{cases}$ . Comme en 3.9, cette construction nous assure que  $\eta$  est fermée :  $\alpha^{n+2}(d^{n+1} \eta) = d^{n+1} \alpha^{n+1} \eta = d^{n+1} d^n \xi = 0$ , par injectivité  $d\eta = 0$ . Enfin  $\delta^n([\omega]) = [\eta]$ . Les vérifications de 3.9 nous assurent que ceci définit bien  $\delta^n$ .

**Exemple 3.52 : cohomologie de  $\mathbb{S}^1$  avec la suite de Mayer-Vietoris (cf 3.23)**

Comme  $\mathbb{S}^1$  est connexe,  $H^0(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}$ . Soient  $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$  et  $V = \mathbb{S}^1 \setminus \{S\}$ , alors  $\mathbb{S}^1 = U \cup V$ . Alors  $U$  et  $V$  ont une composante connexe et  $U \cap V$  en a deux donc  $H^0(U) \simeq H^0(V) \simeq \mathbb{R}$  et  $H^0(U \cap V) \simeq \mathbb{R}^2$ . Nous avons la suite de cohomologie de Mayer-Vietoris  $0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\beta^0} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\delta^0} H^1(\mathbb{S}^1) \rightarrow 0$ . D'après 3.2,  $H^1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}$ .

Donc  $H^k(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

Une analyse plus approfondie de la suite de Mayer-Vietoris permet d'obtenir un générateur de  $H^1(\mathbb{S}^1)$ .

L'application  $i_U^* : Z^0(U) \simeq \mathbb{R} \rightarrow Z^0(U \cap V) \simeq \mathbb{R}^2$  restreint une application constante aux deux composantes connexes de  $U \cap V$ , donc  $i_U^*(x) = (x, x)$ . De même  $i_V^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$   $y \mapsto (y, y)$ .

Ensuite  $\beta^0 : Z^0(U) \oplus Z^0(V) \simeq \mathbb{R}^2 \rightarrow Z^0(U \cap V) \simeq \mathbb{R}^2$  est donnée par  $\beta^0(x, y) = i_U^*(x) - i_V^*(y) = (x, x) - (y, y) = (x - y, x - y)$ . Donc  $\text{im}(\beta^0) = \Delta = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$ . Par exactitude de la suite,  $H^1(\mathbb{S}^1) = \text{im} \delta^0 \simeq \mathbb{R}^2 / \ker \delta^0 = \mathbb{R}^2 / \text{im} \beta^0 = \mathbb{R}^2 / \Delta \simeq \mathbb{R}$ . On (re)trouve donc le résultat.

Ensuite comme  $H^1(\mathbb{S}^1)$  est de dimension 1, il est engendré par tout élément non nul. Un tel élément s'obtient par exemple en prenant  $\delta^0(a, b)$  où  $(a, b) \notin \ker \delta^0 = \text{im} \beta^0 = \Delta$ .

Prenons par exemple  $(a, b) = (1, 0)$ . Soit  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  lisse qui vaut 1 sur la première composante connexe de  $U \cap V$  et 0 sur la seconde. Soit  $\{\rho_U, \rho_V\}$  une partition de l'unité de  $\mathbb{S}^1$  subordonnée au recouvrement  $\{U, V\}$ . Alors  $\beta^0(\rho_V f, -\rho_U f) = f|_{U \cap V} = (1, 0)$ . Puis  $\delta^0(1, 0) = \delta^0([\beta^0(\rho_V f, -\rho_U f)]) = [\eta]$  où  $\eta = \begin{cases} d(\rho_V f) & \text{sur } U \\ -d(\rho_U f) & \text{sur } V \end{cases}$ . ■

**Exemple 3.53 : cohomologie de la sphère  $\mathbb{S}^n$**

Nous avons déjà  $H^k(\mathbb{S}^0) = H^k(\{\pm 1\}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  et  $H^k(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

Nous allons montrer par récurrence que pour  $n \geq 1$ ,  $H^k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

L'initialisation en  $n = 1$  est déjà réalisée.

Supposons la propriété vraie pour un certain  $n - 1$ ,  $n > 1$ . Nous savons déjà, par connexité de  $\mathbb{S}^n$ , que  $H^0(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R}$  et par dimension que  $H^k(\mathbb{S}^n) = 0$  dès que  $k > n$ .

Soient  $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$  et  $V = \mathbb{S}^1 \setminus \{S\}$ , et alors, pour  $1 < k \leq n$ , le morceau suivant de la suite de Mayer-Vietoris

$$\dots \rightarrow H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) \rightarrow H^{k-1}(U \cap V) \rightarrow H^k(\mathbb{S}^n) \rightarrow H^k(U) \oplus H^k(V) \rightarrow \dots$$

donne

$$0 \rightarrow H^{k-1}(U \cap V) \rightarrow H^k(\mathbb{S}^n) \rightarrow 0$$

puisque  $U$  et  $V$  ont le type d'homotopie du point.

**Lemme**

La sphère privée de deux points  $U \cap V = \mathbb{S}^n \setminus \{N, S\}$  est diffeomorphe à  $\mathbb{S}^{n-1} \times ]-1, 1[$

$$\mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times ]-1, 1[$$

L'application  $(x_0, \dots, x_n) \mapsto \left( \frac{(x_1, \dots, x_n)}{\sqrt{1-x_0^2}}, x_0 \right)$  est un diffeomorphisme ■

Comme  $] - 1, 1[$  est contractile,  $\mathbb{S}^{n-1} \times ] - 1, 1[$  et  $\mathbb{S}^{n-1}$  ont même type d'homotopie. Ainsi  $H^{k-1}(U \cap V) \simeq H^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ .

On en déduit que la suite  $0 \rightarrow H^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H^k(\mathbb{S}^n) \rightarrow 0$  est exacte, ce qui permet de calculer  $H^k(\mathbb{S}^n)$  pour  $1 < k \leq n$ .

Il reste à calculer  $H^1(\mathbb{S}^n)$ , ce qui se fait en appliquant 3.2 à

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{S}^n) \rightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \rightarrow H^0(U \cap V) \rightarrow H^1(\mathbb{S}^n) \rightarrow 0$$

et en remarquant que  $H^0(U \cap V) = H^0(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{R}$ . ■

Remarque 3.54 : soit  $n \geq 1$ , comme  $\mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  est une équivalence d'homotopie, on déduit de l'exemple précédent que  $H^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = H^k(\mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{si } k = 0 \quad (n = 1) \\ \mathbb{R} & \text{si } k = 0, n - 1 \quad (n > 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

Exemple 3.55 : cohomologie de l'espace projectif complexe  $P^n\mathbb{C}$ ,  $n \geq 1$

On montre comme dans l'exemple 1.8 que  $P^n\mathbb{C}$  est une variété différentielle, cette fois les cartes vérifient  $\varphi_i(U_i) = \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ . Il s'agit donc d'une variété différentielle lisse de dimension  $2n$ .

Nous allons montrer que  $H^{2k}(P^n\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}$  et que  $H^{2k+1}(P^n\mathbb{C}) \simeq 0$  où  $0 \leq k \leq n$ .

Posons  $p = [1 : 0 : \dots : 0]$ .

**Lemme**

$$P^{n-1}\mathbb{C} \longrightarrow P^n\mathbb{C} \setminus \{p\}$$

L'application  $j : [x_1 : \dots : x_n] \mapsto [0 : x_1 : \dots : x_n]$  est une équivalence d'homotopie.

$$P^n\mathbb{C} \setminus \{p\} \longrightarrow P^{n-1}\mathbb{C}$$

Posons  $k : [x_0 : \dots : x_n] \mapsto [x_1 : \dots : x_n]$  alors  $k \circ j = id$  et  $j \circ k$  est homotope à

l'identité de  $P^n\mathbb{C}$  par  $H(t, [x_0 : \dots : x_n]) = [tx_0 : x_1 : \dots : x_n]$ . ■

Alors  $P^n\mathbb{C} = U \cup V$  où  $U = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in P^n\mathbb{C}, x_0 \neq 0\}$  et  $V = P^n\mathbb{C} \setminus \{p\}$ .

$$U = U_0 \longrightarrow \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$$

Nous avons aussi que  $U \cap V \simeq \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$  puisque  $\varphi_0 : [x_0 : \dots : x_n] \mapsto \left( \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right)$

est un diffeomorphisme qui envoie  $[1 : 0 : \dots : 0]$  sur  $0$ .

Nous allons démontrer le résultat par récurrence. Pour l'initialisation, le résultat est vrai si  $n = 1$  d'après ce qui précède puisque  $P^1\mathbb{C}$  est diffeomorphe à  $\mathbb{S}^2$  (1.21).

On propose d'étudier la structure d'anneau de  $H^*(P^n\mathbb{C})$  dans 3.85.

Pour l'hérédité, supposons la propriété vraie pour un certain rang  $n - 1, n > 1$ . Par connexité de  $P^n\mathbb{C}$ , nous avons déjà que  $H^0(P^n\mathbb{C}) = \mathbb{R}$ . Étudions la portion suivante de la suite de Mayer-Vietoris de  $P^n\mathbb{C}$  ( $1 < k < 2n - 1$ )

$$\dots \rightarrow H^{k-1}(U \cap V) \rightarrow H^k(P^n\mathbb{C}) \rightarrow H^k(U) \oplus H^k(V) \rightarrow H^k(U \cap V) \rightarrow \dots$$

qui donne

$$0 \rightarrow H^k(P^n\mathbb{C}) \rightarrow H^k(P^{n-1}\mathbb{C}) \rightarrow 0$$

ce qui permet de calculer  $H^k(P^n\mathbb{C})$ .

Pour  $k = 1$ ,

$$0 \rightarrow H^0(P^n\mathbb{C}) \rightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \rightarrow H^0(U \cap V) \rightarrow H^1(P^n\mathbb{C}) \rightarrow H^1(U) \oplus H^1(V) \rightarrow H^1(U \cap V) \rightarrow \dots$$

donne

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H^1(P^n\mathbb{C}) \rightarrow H^1(P^{n-1}\mathbb{C}) \rightarrow 0$$

ce qui permet de conclure à l'aide de 3.2.

Pour  $k = 2n - 1, \dots \rightarrow H^{2n-2}(U \cap V) \rightarrow H^{2n-1}(P^n\mathbb{C}) \rightarrow H^{2n-1}(U) \oplus H^{2n-1}(V) \rightarrow \dots$   
 donne  $0 \rightarrow H^{2n-1}(P^n\mathbb{C}) \rightarrow 0$ .

Enfin, pour  $k = 2n$ ,

$$\dots \rightarrow H^{2n-1}(U) \oplus H^{2n-1}(V) \rightarrow H^{2n-1}(U \cap V) \rightarrow H^{2n}(P^n\mathbb{C}) \rightarrow H^{2n}(U) \oplus H^{2n}(V) \rightarrow \dots$$

donne

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H^{2n}(P^n\mathbb{C}) \rightarrow 0$$

ce qui permet de calculer  $H^{2n}(P^n\mathbb{C})$ . ■

**Proposition 3.56 : suite exacte courte de Mayer-Vietoris à support compact**

Soit  $M$  une variété différentielle recouverte par deux ouverts  $U$  et  $V$  alors la suite de Mayer-Vietoris à support compact  $0 \leftarrow \Omega_c^*(M) \xleftarrow{\alpha} \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \xleftarrow{\beta} \Omega_c^*(U \cap V) \leftarrow 0$  est exacte où  $\alpha(\omega, \eta) = j_{U*}\omega + j_{V*}\eta$  et  $\beta(\omega) = (i_{U*}\omega, -i_{V*}\omega)$ .

Démonstration :

Vérifions juste la dernière étape. Si  $\omega \in \Omega^*(M)$  alors  $\omega = \alpha(\rho_U\omega, \rho_V\omega)$ . La forme  $\rho_U\omega$  est bien à support compact puisque  $\text{supp}(\rho_U\omega) \subset \text{supp} \rho_U \cap \text{supp} \omega$  et que, dans un espace séparé, un fermé d'un compact est compact. ■

On déduit de 3.9 :

**Corollaire 3.57 : suite exacte longue de Mayer-Vietoris à support compact**

Si  $M$  est une variété différentielle recouverte par deux ouverts  $U$  et  $V$  alors on a la suite exacte longue suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longleftarrow & & H_c^{n+1}(U \cap V) & \longleftarrow & & \dots \\ & & & \delta^n & & & \\ & & & \longleftarrow & & & \\ & & & H_c^n(M) & \longleftarrow & \alpha & H_c^n(U) \oplus H_c^n(V) & \longleftarrow & \beta & H_c^n(U \cap V) & \longleftarrow & \dots \\ & & & & & & \delta^{n-1} & & & & & \\ & & & \longleftarrow & & & & & & & & \\ & & & H_c^{n-1}(M) & \longleftarrow & & \dots & & & & & \end{array}$$

## 3.7

## Recouvrements simples

On peut démontrer que tout recouvrement ouvert d'une variété différentielle admet un raffinement étant un bon recouvrement, *ie* dont les intersections finies non vides sont difféomorphes à  $\mathbb{R}^n$ . Cependant, ce résultat se démontre avec de la géométrie riemannienne (voir par exemple [1]). Nous proposons ici d'utiliser un résultat plus faible mais admettant une preuve élémentaire : toute variété différentielle admet un raffinement étant un recouvrement simple, *ie* dont les intersections finies non vides sont contractiles. Cette preuve est basée sur la première partie de l'article [10].

## Définition 3.58

Un recouvrement simple est un recouvrement ouvert d'une variété différentielle dont les intersections finies non vides sont contractiles.

## Définition 3.59

Une variété différentielle est dite de type fini si elle admet un recouvrement simple fini.

## Définition 3.60 : raffinement d'un recouvrement ouvert

Soient  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  et  $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in J}$  deux recouvrements ouverts d'un espace topologique.

On dit que  $\mathcal{V}$  est un raffinement de  $\mathcal{U}$ , noté  $\mathcal{U} < \mathcal{V}$  si tout  $V_\beta$  est contenu dans un  $U_\alpha$ , *ie* il existe une application  $\varphi : J \rightarrow I$  tel que  $\forall \beta \in J, V_\beta \subset U_{\varphi(\beta)}$ .

## Théorème 3.61

Tout recouvrement par des ouverts d'une variété différentielle admet un raffinement étant un recouvrement simple.

Démonstration :

D'après le théorème de plongement de Whitney (1.55), on peut supposer que  $M$  est une sous-variété lisse de  $\mathbb{R}^N$  munie de sa structure euclidienne usuelle.

Pour tout  $x \in M$ ,  $T_x M$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^N$  et on considère la projection linéaire  $\pi_x : \mathbb{R}^N \rightarrow T_x M$ .

**Lemme 1**

Pour tout  $x \in M$ , il existe un voisinage ouvert  $U \subset M$  de  $x$  (topologie induite) tel que

- (i)  $\forall y \in U, \pi_y : U \rightarrow U_y = \pi_y(U)$  est un difféomorphisme.
- (ii)  $\forall y \in U, \forall z_1, z_2 \in U, d(z_1, z_2) \leq 2d(\pi_y(z_1), \pi_y(z_2))$ .
- (iii)  $\forall y \in U, \forall z_0 \in U, h_{y, z_0} : \begin{matrix} U_y & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \pi_y(z) & \longmapsto & (d(z, z_0))^2 \end{matrix}$  est convexe.

- (i) Par un changement de repère on peut supposer que  $\mathbb{R}^N = T_x M \oplus E$  de coordonnées  $(t, w)$  et alors  $T_x M$  est le plan  $w = 0$ . D'après le théorème d'inversion locale il existe un ouvert  $U$  tel que  $\pi_x : U \rightarrow \pi_x(U)$  soit un difféomorphisme. La réciproque  $f : V \rightarrow U$  est un paramétrage  $w = f(t)$  de  $M$  au voisinage de  $x$  par un voisinage de 0 dans  $T_x M$ . Donc  $f(0) = 0$  et comme  $T_x M$  est  $w = 0$ ,  $d_x f = 0$ . Donc  $w = o(t)$ . Soit  $y \in U$  alors  $y = (t, f(t))$  alors par l'espace tangent au graphe d'une fonction,  $T_y M = \{t + h, f(t) + d_t f(h)\}$ . Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que sur le voisinage  $\|df\| < \varepsilon$ , donc  $p_y$  est injectif. Soit  $z \in U$  alors  $d_z(p_y) : T_z M \rightarrow T_y M$  coïncide avec la projection orthogonale  $T_z M \rightarrow T_y M$ ;  $p_y : M \hookrightarrow \mathbb{R}^N \rightarrow T_y M$  donc  $d_z(p_y) = T_z M \hookrightarrow \mathbb{R}^N \rightarrow T_y M$ . Donc  $p_y$  est un difféomorphisme sur  $U$ .
- (ii) Comme pour le premier point, on suppose  $\mathbb{R}^N = T_y M \oplus F$  et  $M$  s'écrit  $\{(t, w), w = f(t)\}$  avec  $f(0) = 0$  et  $T_y M : w = 0$ , donc  $d_y f = 0$ . Et ainsi,  $w = o(t) : \text{il existe } \varepsilon > 0 \text{ tel que } \|w\| < \varepsilon\|t\| \text{ pour tout } z = (t, w) \in U$ . Quitte à prendre  $U$  suffisamment petit pour que  $\varepsilon$  soit suffisamment petit, pour tout  $z_1 = (t_1, w_1), z_2 = (t_2, w_2) \in U$ , on a  $d(z_1, z_2) \leq 2d(t_1, t_2)$ .
- (iii) La hessienne de  $h_{x,x}$  en  $x$  est l'identité. On peut prendre  $U$  assez petit pour que la hessienne soit aussi proche que l'on veut du cas précédent. On conclut en remarquant qu'une application lisse est convexe si et seulement si sa hessienne est positive. ■

Comme tout recouvrement ouvert admet une partition de l'unité subordonnée, tout recouvrement ouvert admet un raffinement  $(V_i)_{i \in I}$  localement fini dont les ouverts sont relativement compacts. On suppose que les  $V_i$  sont des ouverts de  $M$  pour la topologie induite. Dans toute la suite on travaille pour la topologie induite sur  $M$ .

Pour tout  $i \in I, V_i$  est recouvert par un nombre fini d'ouverts  $(U_j)$  vérifiant les propriétés du lemme, par relative compacité. Notons  $R_i$  le nombre de Lebesgue du recouvrement  $(U_j)$ , i.e.  $\forall x \in \overline{V_i}, \exists j_0, B_{R_i}(x) \subset U_{j_0}$ .

Comme  $V_i$  est un ouvert, on peut supposer  $B_{R_i}(x) \subset V_i$  (quitte à intersecter les  $U_j$  avec  $V_i$ ), en particulier  $B_{R_i}(x)$  est relativement compacte.

Comme  $B_{R_i}(x) \subset U_{j_0}, B_{R_i}(x)$  hérite des propriétés (i), (ii) et (iii) du lemme 1.

**Lemme 2**

Pour tout  $x \in \overline{V_i}, \{y \in T_x M, d(y, x) < \frac{R_i}{2}\} \subset \pi_x(B_{R_i}(x))$ .

Soit  $z' \in \partial\pi_x(B_{R_i}(x))$ , alors  $z' = \lim z'_i$  où  $z'_i = \pi_x(z_i), z_i \in B_{R_i}(x)$ . Par relative compacité de  $B_{R_i}(x)$ , on peut extraire une sous-suite  $z_{\sigma(i)}$  convergeant vers  $z \in \overline{B_{R_i}(x)}$  et alors par continuité  $z' = \pi_x(z)$ .

D'après (i), tout point intérieur de  $B_{R_i}(x)$  s'envoie sur un point intérieur, donc  $z \in \partial B_{R_i}(x)$ . Donc  $d(x, z) = R_i$  et d'après (ii)  $d(x, z') = d(\pi_x(x), \pi_x(z)) \geq \frac{R_i}{2}$ . ■

**Lemme 3**

Soient  $x \in \overline{V_i}$  et  $r \leq \frac{R_i}{4}$  alors pour tout  $y \in B_r(x), \pi_x : B(y, r) \rightarrow T_x M$  induit un difféomorphisme sur un convexe.

Soient  $z'_1, z'_2 \in \pi_x(B(y, r))$  alors  $z'_1 = \pi_x(z_1)$  et  $z'_2 = \pi_x(z_2)$  avec  $d(z_i, y) < r \Rightarrow d(z_i, x) < 2r$  puisque  $d(x, y) < r$ .

Comme une projection diminue les distances :  $d(z'_i, x) = d(\pi_x(z_i), \pi_x(x)) \leq d(z_i, x) < 2r$ .

Pour l'existence du nombre de Lebesgue d'un recouvrement, voir mon mémoire de M1 : <http://citron.9grid.fr/docs/memoire.pdf>, lemme 3.12.

Donc pour tout  $z' \in [z'_1, z'_2]$ ,  $d(z', x) = \|z'_1 t + z'_2(1-t) - x(t + (1-t))\| \leq td(z'_1, x) + (1-t)d(z'_2, x) < 2tr + 2(1-t)r = 2r$ .  
 D'après le lemme 2,  $z' \in \pi_x(B(x, R_i))$ .  

$$\pi_x(B_{R_i}(x)) \longrightarrow \mathbb{R}$$
 D'après (iii)  $z' = \pi_x(z) \longmapsto (d(z, y))^2$  est convexe, et comme en  $z'_0$  et  $z'_1$  la fonction est inférieure à  $r^2$ , il en va de même pour tout  $z' \in [z_1, z'_2]$ . ■

Construction du recouvrement : on recouvre chaque  $V_i$  par un nombre fini (relative compacité) de  $B_{\frac{R_i}{4}}(x_{i_j})$ , on obtient ainsi un raffinement de  $(V_i)$  et donc du recouvrement initial. Ensuite ce recouvrement est localement fini (vu que  $(V_i)$  l'est).  
 Montrons que ce recouvrement est simple : soit  $x \in Z = \bigcap_{\text{forcément finie}} B_{\frac{R_i}{4}}(x_{i_j})$  alors chaque boule de l'intersection est de la forme  $B_s(y)$  avec  $s < r$  et  $y \in B_r(x)$  où  $r = \max \frac{R_i}{4}$ . Chaque boule est contenue dans  $B_{R_i}(x)$  et sur cette boule,  $\pi_x$  est un difféomorphisme. D'après le lemme 3, chaque  $\pi_x(B_{\frac{R_i}{4}}(x_{i_j}))$  est convexe, et donc l'image de  $Z$  par  $\pi_x$  est convexe comme intersection finie de convexes. L'homotopie se relève par le difféomorphisme  $\pi_x$  et ainsi  $Z$  est convexe. ■

Remarque 3.62 : on peut se ramener à l'existence d'un bon recouvrement à l'aide du résultat suivant : tout ouvert étoilé (c'est donc en particulier vrai pour les convexes) de  $\mathbb{R}^n$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}^n$ . Une preuve élémentaire de ce résultat est disponible dans [4].

**Corollaire 3.63**  
 Toute variété différentielle admet un recouvrement simple.

## 3.8 Dimension finie de la cohomologie de de Rham

**Théorème 3.64**  
 Si  $M$  est une variété différentielle de type fini alors  $H^n(M)$  est de dimension finie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Remarques 3.65 :

- Le résultat est donc en particulier vrai si  $M$  est compacte.
- Ce théorème revient à dire que si  $M$  est de type fini alors  $\dim H^*(M) < \infty$ .

Démonstration :  
 Nous allons démontrer ce résultat en réalisant une récurrence sur le cardinal d'un recouvrement simple de  $M$ .  
 Si ce cardinal vaut 1, alors  $M$  est contractile et le résultat est donc vrai.  
 Supposons désormais que le résultat soit vrai pour toute variété différentielle ayant un recouvrement simple de moins de  $p$  ouverts et soit  $M$  une variété différentielle admettant un recouvrement simple  $\{U_0, \dots, U_p\}$  de  $p + 1$  éléments.  
 Alors  $V = U_0 \cup \dots \cup U_{p-1}$  est un ouvert admettant un recouvrement simple  $\{U_0, \dots, U_{p-1}\}$ , ainsi sa cohomologie est de dimension finie. L'ouvert  $U_p$  est contractile, sa cohomologie est donc de dimension finie. Et enfin,  $V \cap U_p = (U_0 \cup \dots \cup U_{p-1}) \cap U_p$  est un ouvert admettant  $\{U_0 \cap U_p, \dots, U_{p-1} \cap U_p\}$  comme recouvrement simple, ainsi sa cohomologie est de dimension finie.  
 Comme  $M = V \cup U_p$ , la suite longue de Mayer-Vietoris

$$0 \rightarrow H^0(M) \rightarrow H^0(U_p) \oplus H^0(V) \rightarrow \dots$$

nous indique que  $H^0(M)$  est isomorphe à un sous-espace vectoriel de  $H^0(U_p) \oplus H^0(V)$ .

Pour  $k > 0$ , étudions la portion suivante de la suite de Mayer-Vietoris :

$$\dots \rightarrow H^{k-1}(V \cap U_p) \xrightarrow{\delta^{k-1}} H^k(M) \xrightarrow{\alpha^k} H^k(U_p) \oplus H^k(V) \rightarrow \dots$$

Nous obtenons que  $H^k(M) \simeq \ker \alpha^k \oplus \text{im } \alpha^k = \text{im } \delta^{k-1} \oplus \text{im } \alpha^k$ , ce qui permet de conclure. ■

Remarque 3.66 : en adaptant la preuve, on montre que si  $M$  est de type fini alors  $H_c^n(M)$  est de dimension finie pour tout  $n$ .

Remarque 3.67 : les dimensions des espaces de cohomologie se nomment *nombre de Betti*.

### 3.9 Dualité de Poincaré

La dualité de Poincaré peut se démontrer facilement lorsque  $M$  est orientée de type fini en réalisant une récurrence sur le cardinal d'un recouvrement simple fini similaire à 3.71 (voir par exemple [1]). Nous proposons une preuve plus générale où nous ne faisons pas d'hypothèse sur l'existence d'un recouvrement simple fini, ce raffinement demande une étude plus précise de la topologie des variétés différentielles (voir [9] et [6]).

Pour  $M$  une variété différentielle orientée de dimension  $n$  et pour un entier  $k$ , on considère l'application bilinéaire  $\mathcal{P}_M^k : H^k(M) \times H_c^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  :  $([\omega], [\eta]) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta$  qui est bien définie

puisque le produit extérieur et l'intégration passent à la cohomologie (d'après le théorème de Stokes pour le second).

L'application  $\mathcal{P}_M^k$  induit une application linéaire  $\mathcal{D}_M^k : H^k(M) \rightarrow H_c^{n-k}(M)^*$  :  $[\omega] \mapsto ([\eta] \mapsto \int_M \omega \wedge \eta)$ .

**Théorème 3.68 : dualité de Poincaré**

Soit  $M$  une variété différentielle orientée et soit  $k$  un entier, alors l'application linéaire  $\mathcal{D}_M^k$  est un isomorphisme. Donc  $H^k(M) \simeq H_c^{n-k}(M)^*$ .

Pour démontrer ce résultat, nous allons avoir besoin du lemme suivant :

Si  $U$  et  $V$  sont deux ouverts de  $M$ , nous avons les suites de Mayer-Vietoris suivantes (en considérant  $U \cup V$  comme variété différentielle) :

$$\dots \xrightarrow{\delta^{k-1}} H^k(U \cup V) \xrightarrow{\text{restriction}} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{\text{différence}} H^k(U \cap V) \xrightarrow{\delta^k} H^{k+1}(U \cup V) \rightarrow \dots$$

et

$$\dots \xleftarrow{\delta_c^{n-k}} H_c^{n-k}(U \cup V) \xleftarrow{\text{somme}} H_c^{n-k}(U) \oplus H_c^{n-k}(V) \xleftarrow{} H_c^{n-k}(U \cap V) \xleftarrow{\delta_c^{n-k-1}} H_c^{n-k-1}(U \cup V) \xleftarrow{} \dots$$

En remplaçant  $\delta^k$  par  $(-1)^{k+1} \delta^k$  et en passant au dual la ligne du bas, nous obtenons le diagramme suivant dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{(-1)^k \delta^{k-1}} & H^k(U \cup V) & \xrightarrow{\alpha^k} & H^k(U) \oplus H^k(V) & \xrightarrow{\beta^k} & H^k(U \cap V) & \xrightarrow{(-1)^{k+1} \delta^k} & H^{k+1}(U \cup V) & \rightarrow \dots \\ & & \downarrow \mathcal{D}_{U \cup V} & \textcircled{1} & \downarrow \mathcal{D}_U \oplus \mathcal{D}_V & \textcircled{2} & \downarrow \mathcal{D}_{U \cap V} & \textcircled{3} & \downarrow \mathcal{D}_{U \cup V}^{k+1} & \\ \dots & \rightarrow & H_c^{n-k}(U \cup V)^* & \xrightarrow{\alpha_{n-k}} & H_c^{n-k}(U)^* \oplus H_c^{n-k}(V)^* & \xrightarrow{\beta_{n-k}} & H_c^{n-k}(U \cap V)^* & \xrightarrow{\delta_c^{n-k-1}} & H_c^{n-k-1}(U \cup V)^* & \rightarrow \dots \end{array}$$

**Lemme 3.69**

Le diagramme ci-dessus commute.

On rappelle que comme  $i_U : U \cap V \hookrightarrow U$ ,  $i_{U*}\tau$  est l'extension de  $\tau$  par 0 sur  $U$ .

Démonstration :

La commutativité des carrés ① et ② est facile à vérifier. Intéressons-nous au troisième carré. Rappelons que si  $[\omega] \in H^k(U \cap V)$  avec  $\omega$  un représentant fermé alors  $\delta^k[\omega] = [\eta] \in H^{k+1}(U \cup V)$  où  $\eta$  est un représentant fermé et vérifie  $\eta|_U = d(\rho_V \omega)$  et  $\eta|_V = -d(\rho_U \omega)$ . De même si  $[\theta] \in H^{n-k-1}(U \cup V)$  avec  $\theta$  fermé alors  $\delta_c^{n-k-1}[\theta] = [\tau] \in H_c^{n-k}(U \cap V)$  avec  $\tau$  fermé vérifiant  $(i_{U*}\tau, -i_{V*}\tau) = (d(\rho_U \theta), d(\rho_V \theta))$ .

Remarquons que comme  $\omega$  et  $\tau$  sont fermés, on a :  $d(\rho_V \omega) = (d\rho_V)\omega$  et  $d(\rho_U \omega) = (d\rho_U)\omega$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} [{}^t\delta_c^{n-k-1} \circ \mathcal{D}_{U \cap V}^k([\omega])]([\theta]) &= \int_{U \cap V} \omega \wedge \tau \\ &= - \int_{U \cap V} \omega \wedge (d\rho_V)\theta \\ &= (-1)^{k+1} \int_{U \cap V} (d\rho_V)\omega \wedge \theta \\ &= (-1)^{k+1} \int_{U \cup V} \eta \wedge \theta \text{ puisque } \text{supp } \eta \subset U \cap V \\ &= (-1)^{k+1} [\mathcal{D}_{U \cup V}^{k+1} \circ \delta^k([\omega])]([\theta]) \end{aligned}$$

■

Remarque 3.70 : on peut supposer que  $M$  admet une base dénombrable stable par intersections finies : soit  $\mathcal{B}$  une base dénombrable de  $M$  alors  $\mathcal{B}' = \{U_1 \cap \dots \cap U_m, U_i \in \mathcal{B}\}$  est encore une base dénombrable (les intersections à 1 ouvert sont dénombrables, celles à deux aussi... on a donc une réunion dénombrable de dénombrables qui est dénombrable).

Jusque la fin de la preuve de la dualité de Poincaré, si  $\mathcal{B}$  est une base dénombrable stable par intersections finies de  $M$  alors on note  $\mathcal{B}_f$  l'ensemble des ouverts de  $M$  qui s'écrivent comme union finie d'éléments de  $\mathcal{B}$  (c'est encore une base dénombrable stable par intersections finies) et  $\mathcal{B}_s$  l'ensemble des ouverts de  $M$  qui s'écrivent comme union (au plus dénombrable) d'éléments disjoints de  $\mathcal{B}$ .

**Lemme 3.71**

Si pour tout  $O \in \mathcal{B}$  et pour tout  $k$ ,  $D_O^k$  est un isomorphisme alors pour tout  $O \in \mathcal{B}_f$  et pour tout  $k$ ,  $D_O^k$  est un isomorphisme.

Démonstration :

Tout élément de  $\mathcal{B}_f$  s'écrit  $O = O_1 \cup \dots \cup O_m$  avec  $O_i \in \mathcal{B}$ .

Démontrons le résultat par une récurrence sur  $m$ . Si  $m = 1$ , alors le résultat est vrai par hypothèse.

Supposons que le résultat soit vrai pour tout ouvert de  $\mathcal{B}_f$  s'écrivant comme réunion d'au plus  $m-1$  éléments de  $\mathcal{B}$  et soit  $O = O_1 \cup \dots \cup O_m \in \mathcal{B}_f$  avec  $O_i \in \mathcal{B}$ . Posons  $U = O_1 \cup \dots \cup O_{m-1}$  et  $V = O_m$  alors  $U \cap V = (O_1 \cap O_m) \cup \dots \cup (O_{m-1} \cap O_m)$  et ainsi le résultat est vrai pour  $U$ ,  $V$  et  $U \cap V$  par hypothèse de récurrence, et donc pour  $U \cup V$  en appliquant le lemme des cinq (3.3) au diagramme du lemme 3.69. ■

**Lemme 3.72**

Si pour tout  $O \in \mathcal{B}$  et pour tout  $k$ ,  $D_O^k$  est un isomorphisme alors pour tout  $O \in \mathcal{B}_s$  et pour tout  $k$ ,  $D_O^k$  est un isomorphisme.

Démonstration :

Soit  $O \in \mathcal{B}_s$  alors  $O = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} O_i$  avec  $O_i \in \mathcal{B}$ .

D'après 3.25 nous avons un isomorphisme  $H^k(O) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=0}^{\infty} H^k(O_i)$ . De même, d'après 3.29

nous avons un isomorphisme  $\bigoplus_{i=0}^{\infty} H_c^{n-k}(O_i) \xrightarrow{\sim} H_c^{n-k}(O)$ , qui en passant au dual induit un

isomorphisme  $H_c^{n-k}(O)^* \xrightarrow{\sim} \prod_{i=0}^{\infty} H_c^{n-k}(O_i)^*$ .

On vérifie que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} H^k(O) & \xrightarrow{\mathcal{D}_O^k} & H_c^{n-k}(O)^* \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ \prod_{i=0}^{\infty} H^k(O_i) & \xrightarrow{\prod_i \mathcal{D}_{O_i}^k} & \prod_{i=0}^{\infty} H_c^{n-k}(O_i)^* \end{array}$$

ce qui permet de conclure. ■

**Lemme 3.73**

Tous les ouverts de  $M$  sont contenus dans  $((\mathcal{B}_f)_s)_f$  (il s'agit donc de l'ensemble des ouverts de  $M$ ).

Démonstration :

Soit  $O$  un ouvert de  $M$  alors  $O$  est une variété différentielle. Soit  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite d'ouverts de 1.46 pour la variété  $O$ . Nous allons construire une suite d'ouverts  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant :

- (i)  $\overline{V}_n \subset \bigcup_{m \leq n} W_m \subset V_{n+1} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n = O$
- (ii)  $W_n \in \mathcal{B}_f$
- (iii)  $W_n \cap W_{n+2} = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$

Comme  $V_1$  est un ouvert,  $V_1$  s'écrit comme une réunion d'ouverts de  $\mathcal{B}$ , on extrait un nombre fini de ces ouverts recouvrant  $\overline{V}_0$ , et on note  $W_0$  la réunion de ces ouverts.

Supposons  $W_m$  construits pour  $m < n$ . Alors  $\overline{V}_i \setminus \bigcup_{m < n} W_m$  est un compact inclus dans

l'ouvert  $V_{n+1} \setminus \overline{V}_{n-1}$ , cet ouvert s'écrit comme réunion d'éléments de  $\mathcal{B}$  dont on extrait un recouvrement fini de  $\overline{V}_i \setminus \bigcup_{m < n} W_m$  et on note  $W_n$  la réunion des ouverts de ce recouvrement.

On a bien  $\forall n, W_n \in \mathcal{B}_f$ . Le premier point est aussi vrai puisque

$$\bigcup_{m \leq n} W_m = W_n \cup \bigcup_{m < n} W_m \supset \left( \overline{V}_n \setminus \bigcup_{m < n} W_m \right) \cup \bigcup_{m < n} W_m = \overline{V}_n$$

Le troisième point est vrai puisque  $W_n \subset V_{n+1} \setminus \overline{V}_{n-1}$  et  $W_{n+2} \subset V_{n+3} \setminus \overline{V}_{n+1}$  et que ces ensembles sont disjoints.

Enfin posons  $U_1 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} W_{2n} \in (\mathcal{B}_f)_s$  et  $U_2 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} W_{2n+1} \in (\mathcal{B}_f)_s$  alors  $O = U_1 \cup U_2 \in ((\mathcal{B}_f)_s)_f$ . ■

Démonstration de la dualité de Poincaré :

Cas 1 :  $M = \mathbb{R}^n$ .

Comme  $H^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  et  $H_c^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  il suffit de vérifier que

$\mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}^0 : H^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_c^n(\mathbb{R}^n)^*$  est un isomorphisme. D'après les dimensions, il suffit même simplement de vérifier que  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}^0 \neq 0$ .

Or  $[D(1)]([\eta]) = \int_{\mathbb{R}^n} 1 \wedge \eta = \int_{\mathbb{R}^n} \eta$ , donc  $D(1) \neq 0$  et  $D \neq 0$  (prendre  $\eta = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  avec  $f$  positive à support compact).

Cas 2 :  $M$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$

Les ensembles  $O = \{x \in \mathbb{R}^n, a_i < x_i < b_i\}$  forment une base stable par intersections finies pour la topologie usuelle de  $\mathbb{R}^n$  et sont difféomorphes à  $\mathbb{R}^n$  par  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow O$ . Comme  $f^{-1}$  est propre on peut considérer  $(f^{-1})^* : H_c^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_c^*(O)$ . On vérifie alors que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} H^k(O) & \xrightarrow[\sim]{f^*} & H^k(\mathbb{R}^n) \\ \mathcal{D}_O^k \downarrow & & \sim \downarrow \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}^k \\ H_c^{n-k}(O)^* & \xrightarrow[\sim]{(f^{-1})^*} & H_c^{n-k}(\mathbb{R}^n)^* \end{array}$$

Et ainsi d'après le premier cas (pour l'isomorphisme de  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}^k$ ) et d'après les lemmes précédents, la dualité de Poincaré est vraie pour tout ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}^k$  est un isomorphisme.

Cas 3 :  $M$  est une variété différentielle orientée de dimension  $n$

Remarquons que  $M$  admet une base dénombrable stable par intersections finies dont les ouverts sont difféomorphes à des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  (on prend  $\mathcal{B}$  une base dénombrable stable par intersections finies et  $\mathcal{A}$  l'ensemble des cartes d'un atlas, alors  $\mathcal{B}' = \{U \cap V_1 \cap \dots \cap V_k, U \in \mathcal{B}, V_i \in \mathcal{A}\}$  convient : si  $O$  est un ouvert et si  $x \in O$ , alors il existe  $U \in \mathcal{B}$  tel que  $x \in U \subset O$  et il existe  $V \in \mathcal{G}$  tel que  $x \in V$  et donc  $x \in V \cap U \subset O$ ).

Ainsi, d'après le cas précédent et avec un diagramme commutatif similaire, on voit que tout ouvert de cette base vérifie la dualité de Poincaré. Donc, d'après les lemmes précédents, tout ouvert de  $M$ , et donc  $M$ , vérifient la dualité de Poincaré. ■

Remarque 3.74 : nous n'avons généralement pas  $H_c^k(M) \simeq H^{n-k}(M)^*$ , cela vient du fait que le dual d'une somme directe est un produit direct mais que le dual d'un produit direct n'est pas une somme directe.

**Corollaire 3.75**

Si  $M$  est une variété différentielle connexe et orientée de dimension  $n$  alors  $H_c^n(M) = \mathbb{R}$ .

**Corollaire 3.76**

Si  $M$  est une variété différentielle connexe et orientée de dimension  $n$  alors

$$H^n(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } M \text{ est compacte} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Démonstration :

Si  $M$  est compacte, c'est évident en utilisant le corollaire précédent.

Supposons que  $M$  ne soit pas compacte alors,  $H^n(M) \simeq H_c^0(M)^*$ , et  $H_c^0(M) \simeq 0$  puisque les formes différentielles constantes sur  $M$  (connexité) ne sont pas à support compact. ■

Application 3.77 : degré d'une application entre variétés différentielles orientées et compactes

Soit  $f : M \rightarrow N$  une application lisse entre deux variétés différentielles orientées, compactes et de même dimension. Le degré de  $f$  est défini comme étant  $\int_M f^* \omega$  où  $\omega$  est un générateur de  $H^n(N)$ . On montre avec le même argument que 3.47, que le degré de  $f$  est un entier. ■

Remarque 3.78 : on retrouve le lemme de Poincaré à support compact (3.43) :  $H_c^k(M)^* \simeq H^{n-k}(M) \simeq H^{n-k}(M \times \mathbb{R}) \simeq H_c^{k+1}(M \times \mathbb{R})^*$  (puisque  $\mathbb{R}$  est contractile) et donc  $H_c^k(M) \simeq H_c^{k+1}(M \times \mathbb{R})$ .

**Corollaire 3.79**

Si  $M$  est une variété différentielle compacte et orientée de dimension  $n \geq 1$  alors pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  l'application

$$\begin{aligned} H^k(M) &\longrightarrow H^{n-k}(M)^* \\ [\omega] &\longmapsto ([\eta] \mapsto \int_M \omega \wedge \eta) \end{aligned}$$

est un isomorphisme linéaire.

**Corollaire 3.80**

Soit  $M$  une variété différentielle compacte, connexe et orientée de dimension  $n \geq 1$  alors

$$\begin{aligned} H^n(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\omega] &\longmapsto \int_M \omega \end{aligned}$$

est un isomorphisme linéaire.

Démonstration :

On applique le corollaire précédent pour  $k = 0$  et alors  $H^0(M) = \mathbb{R}$ . ■

Remarque 3.81 : on en déduit que si  $M$  est compact, connexe, orientée et de dimension  $n$  alors pour  $\omega \in \Omega^n(M)$ ,  $\int_M \omega = 0 \Leftrightarrow \omega$  exacte. Il s'agit d'une sorte de réciproque à 2.83 et c'est l'argument utilisé en 3.23 pour calculer la cohomologie de  $\mathbb{S}^1$ .

Le corollaire précédent admet une généralisation :

**Corollaire 3.82**

Soit  $M$  une variété différentielle connexe et orientée de dimension  $n$  alors  $\varphi :$

$$\begin{aligned} H_c^n(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\omega] &\longmapsto \int_M \omega \end{aligned} \text{ est un isomorphisme linéaire.}$$

Démonstration :

On a l'isomorphisme  $\mathcal{D}_M^0 : \begin{aligned} \mathbb{R} \simeq H^0(M) &\longrightarrow H_c^n(M)^* \\ c &\longmapsto ([\omega] \mapsto c \int_M \omega) \end{aligned}$  et  $\varphi = \mathcal{D}_M^0(1)$ , donc  $\varphi$  est non nulle et c'est donc un isomorphisme puisque  $\dim H_c^n(M)^* = 1$ . ■

Remarque 3.83 : attention, le résultat change complètement lorsque  $M$  n'est pas orientable :

**Proposition 3.84**

Si  $M$  est une variété différentielle connexe de dimension  $n$  non orientable alors  $H_c^n(M) = \{0\}$ .

Démonstration :

Le projecteur  $p : \overline{M} \rightarrow M$  est un revêtement à deux feuillets où  $\overline{M}$  est orientable et connexe. Commençons par remarquer que l'unique automorphisme de revêtement  $\tau$  non trivial reverse l'orientation. Puis si  $\omega \in \Omega_c^n(M)$  alors  $\overline{\omega} = p^*\omega \in \Omega_c^n(\overline{M})$  vérifie  $\tau^*\overline{\omega} = \overline{\omega}$ . Ainsi,  $\int_{\overline{M}} \overline{\omega} = \int_{\overline{M}} \tau^*\overline{\omega} = -\int_{\overline{M}} \overline{\omega}$  et donc  $\int_{\overline{M}} \overline{\omega} = 0$ . Donc d'après le corollaire précédent,  $\overline{\omega}$  est exacte : il existe  $\overline{\eta} \in \Omega_c^{n-1}(\overline{M})$  vérifiant  $\overline{\omega} = d\overline{\eta}$ . Alors  $\frac{1}{2}(\overline{\eta} + \tau^*\overline{\eta})$  est une  $(n-1)$ -forme différentielle sur  $\overline{M}$  invariante par  $\tau^*$  (puisque  $\tau^2 = id$ ) dont la différentielle coïncide avec celle de  $\overline{\omega}$ . Elle définit ainsi une forme  $\eta$  sur  $M$  vérifiant  $\overline{\eta} = p^*\eta$ .

Enfin, comme  $p$  est un isomorphisme local,  $\omega = d\eta$ . ■

Exemple 3.85 : structure d'anneau sur  $H^*(P^n\mathbb{C})$  (suite de l'exemple 3.55)

La dualité de Poincaré va nous permettre de calculer la structure d'anneau de l'algèbre graduée  $H^*(P^n\mathbb{C}) = \bigoplus H^k(P^n\mathbb{C})$  : nous allons montrer que  $H^*(P^n\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}[u]/(u^{n+1})$  avec  $u$  de degré 2. Cela signifie que si  $u$  est un générateur de  $H^2(P^n\mathbb{C})$  ( $ie \neq 0$ ) alors  $u^k$  est non nul pour  $k \leq n$ .

Nous allons démontrer le résultat par récurrence sur  $n$ .

L'initialisation au rang  $n = 1$  est immédiate.

Supposons que la propriété soit vraie pour un certain rang  $n - 1$  :  $H^*(P^{n-1}\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}[v]/(v^n)$ .

Lemme

L'inclusion  $j : P^{n-1}\mathbb{C} \rightarrow P^n\mathbb{C}$  de 3.55 induit un isomorphisme  $j^* : H^k(P^n\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^k(P^{n-1}\mathbb{C})$  pour  $k < 2n$ .

Nous avons vu ce résultat dans la preuve de 3.55 :  $0 \rightarrow H^k(P^n\mathbb{C}) \xrightarrow{j^*} H^k(P^{n-1}\mathbb{C}) \rightarrow 0$  est exacte pour  $1 < k < 2n - 1$ , utiliser  $H^{2n-1}(P^n\mathbb{C}) = 0$  pour  $k = 2n$ , pour  $k = 1$  il suffit de remarquer, par exemple, que  $H^0(U) \rightarrow H^0(U \cap V)$  est surjective. (remarque : pour  $k = 2n$ , on avait  $H^{2n-1}(\mathbb{S}^{2n-1}) \simeq H^{2n}(P\mathbb{C}^n)$ ). ■

Il existe donc  $u \in H^2(P\mathbb{C}^n)$  tel que  $j^*(u) = v$ . Ensuite, pour  $k < n$ , on a  $j^*(u^k) = (j^*(u))^k = v^k \neq 0 \Rightarrow u^k \neq 0$ .

D'après la dualité de Poincaré, on a l'isomorphisme  $\mathcal{D}^{2(n-1)} : H^{2(n-1)}(P\mathbb{C}^n) \rightarrow H^2(P\mathbb{C}^n)^*$  donné par  $\mathcal{D}^{2(n-1)}(\omega)(u) = \omega u$ . Il doit être non nul pour tous les  $\omega \neq 0$ , en particulier pour  $\omega = u^{n-1}$ . Donc  $u^n \neq 0$ . ■

## 3.10 Théorèmes de Künneth

Tout comme pour la dualité de Poincaré, les théorèmes de Künneth peuvent facilement se démontrer, en faisant des hypothèses sur l'existence d'un recouvrement simple fini pour une des deux variétés différentielles, à l'aide d'une récurrence sur le cardinal de ce recouvrement simple similaire à 3.88 (voir [1]). Nous proposons ici une approche plus générale qui nécessite une étude plus précise de la topologie des variétés différentielles (voir [9]).

Pour plus de précisions sur le produit tensoriel d'algèbres graduées voir la section Ap.83.

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles, on considère les projections  $\pi_M$  et  $\pi_N$

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\pi_M} & M \\ \pi_N \downarrow & & \\ N & & \end{array}$$

alors l'application bilinéaire  $\Omega^*(M) \times \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M \times N)$   
 $(\omega, \eta) \mapsto \pi_M^* \omega \wedge \pi_N^* \eta$  induit un morphisme d'al-

gèbres graduées  $\kappa : \Omega^*(M) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M \times N)$ . On vérifie qu'il s'agit d'un morphisme de complexes de cochaînes : si  $\omega \in \Omega^n(M)$  et si  $\eta \in \Omega^m(N)$  alors  $\kappa(d^{n+m}(\omega \otimes \eta)) = \kappa((d^n \omega) \otimes \eta + (-1)^n \omega \otimes (d^m \eta)) = \pi_M^*(d^n \omega) \wedge \pi_N^* \eta + (-1)^n \pi_M^* \omega \wedge \pi_N^*(d^m \eta) = (d^n(\pi_M^* \omega)) \wedge \pi_N^* \eta + (-1)^n \pi_M^* \omega \wedge (d^m(\pi_N^* \eta)) = d^{n+m}(\pi_M^* \omega \wedge \pi_N^* \eta) = d^{n+m} \kappa(\omega \otimes \eta)$  donc  $d \circ \kappa = \kappa \circ d$  et donc  $\kappa$  passe

à la cohomologie en  $\kappa : \Omega^*(M) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^*(N) \simeq H^*(M) \otimes_{\mathbb{R}} H^*(N) \rightarrow H^*(M \times N)$   
 $[\omega] \otimes [\eta] \mapsto [\pi_M^* \omega \wedge \pi_N^* \eta]$ .

Remarquons que  $\kappa : \Omega^*(M) \times \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M \times N)$  se restreint en une application  $\kappa_c : \Omega_c^*(M) \times \Omega_c^*(N) \rightarrow \Omega_c^*(M \times N)$  (puisque  $\text{supp } \kappa(\omega, \eta) \subset \text{supp } \omega \times \text{supp } \eta$ ) qui, comme précédemment, induit un morphisme d'algèbres graduées  $\kappa_c : H_c^*(M) \otimes_{\mathbb{R}} H_c^*(N) \rightarrow H_c^*(M \times N)$ .

**Théorème 3.86 : théorème de Künneth à support compact**

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles.  
 L'application  $\kappa_c : H_c^*(M) \otimes_{\mathbb{R}} H_c^*(N) \rightarrow H_c^*(M \times N)$  est un isomorphisme d'algèbres graduées.

Remarque 3.87 : en particulier si  $M$  et  $N$  sont compactes alors  $H^*(M) \otimes_{\mathbb{R}} H^*(N) \rightarrow H^*(M \times N)$ .

La démonstration de ce lemme nécessite les lemmes suivants.

Nous reprenons les conventions de la démonstration de la preuve de la dualité de Poincaré : si  $\mathcal{B}$  est une base topologique dénombrable stable par intersections finies de  $M$  alors  $\mathcal{B}_f$  est l'ensemble des unions finies d'éléments de  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}_s$  est l'ensemble des unions disjointes d'éléments de  $\mathcal{B}$ .

**Lemme 3.88**

Si  $\mathcal{B}$  est une base dénombrable stable par intersections finies de  $M$  et si  $\kappa_c : H_c^*(O) \otimes_{\mathbb{R}} H_c^*(N) \rightarrow H_c^*(O \times N)$  est un isomorphisme pour tout  $O \in \mathcal{B}$  alors il en est de même pour tout  $O \in \mathcal{B}_f$ .

Démonstration :

Un élément  $O \in \mathcal{B}$  s'écrit  $O = U_1 \cup \dots \cup U_m$ ,  $U_i \in \mathcal{B}$ . Nous allons réaliser une récurrence sur  $m$ . Si  $m = 1$ , le résultat est vrai par hypothèse.

Pour l'hérédité supposons le résultat vrai pour tout ouvert s'écrivant comme réunion d'au plus  $m-1$  éléments et considérons  $O = U_1 \cup \dots \cup U_m$ ,  $U_i \in \mathcal{B}$ . Posons  $U = U_1$  et  $V = U_2 \cup \dots \cup U_m$  alors  $W = U \cap V = (U_1 \cap U_2) \cup \dots \cup (U_1 \cap U_m)$  avec  $U_1 \cap U_i \in \mathcal{B}$ . Par hypothèse de récurrence, le résultat est vrai pour  $U$ ,  $V$  et  $W$ .

Considérons les suites exactes courtes de Mayer-Vietoris

$$0 \rightarrow \Omega_c^*(W) \rightarrow \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \rightarrow \Omega_c^*(O) \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow \Omega_c^*(W \times N) \rightarrow \Omega_c^*(U \times N) \oplus \Omega_c^*(V \times N) \rightarrow \Omega_c^*(O \times N) \rightarrow 0$$

alors en réalisant le produit tensoriel de la première suite par  $\Omega_c^*(N)$ , on obtient le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_c^*(W) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_c^*(N) & \longrightarrow & (\Omega_c^*(U) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_c^*(N)) \oplus (\Omega_c^*(V) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_c^*(N)) & \longrightarrow & \Omega_c^*(O) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_c^*(N) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \kappa_c & & \downarrow \kappa_c \oplus \kappa_c & & \downarrow \kappa_c \\ 0 & \longrightarrow & \Omega_c^*(W \times N) & \longrightarrow & \Omega_c^*(U \times N) \oplus \Omega_c^*(V \times N) & \longrightarrow & \Omega_c^*(O \times N) \longrightarrow 0 \end{array}$$

On conclut en appliquant le lemme des cinq (3.3) dans le diagramme de cohomologie dont les lignes sont exactes déduit du diagramme précédent puisque  $\kappa_c : H_c^*(W) \otimes_{\mathbb{R}} H_c^*(N) \rightarrow H_c^*(W \times N)$ ,  $\kappa_c : H_c^*(U) \otimes_{\mathbb{R}} H_c^*(N) \rightarrow H_c^*(U \times N)$  et  $\kappa_c : H_c^*(V) \otimes_{\mathbb{R}} H_c^*(N) \rightarrow H_c^*(V \times N)$  sont des isomorphismes. ■

**Lemme 3.89**

Si  $\mathcal{B}$  est une base dénombrable stable par intersections finies de  $M$  et si  $\kappa_c : H_c^*(O) \otimes_{\mathbb{R}} H_c^*(N) \rightarrow H_c^*(O \times N)$  est un isomorphisme pour tout  $O \in \mathcal{B}$  alors il en est de même pour tout  $O \in \mathcal{B}_s$ .

Démonstration :

Si  $O = \bigsqcup_{\alpha} O_{\alpha}$ , on construit à l'aide de 3.29 le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\alpha} (H_c^*(O_{\alpha}) \otimes H_c^*(N)) & \xrightarrow{\oplus \kappa_c} & \bigoplus_{\alpha} H_c^*(O_{\alpha} \times N) \\ \simeq \downarrow \varphi & & \downarrow \simeq \\ H_c^*(O) \otimes H_c^*(N) & \xrightarrow{\kappa_c} & H_c^*(O \times N) \end{array}$$

où  $\varphi$  est la composée

$$\bigoplus_{\alpha} (H_c^*(O_{\alpha}) \otimes H_c^*(N)) \xrightarrow{\sim} \left( \bigoplus_{\alpha} H_c^*(O_{\alpha}) \right) \otimes H_c^*(N) \xrightarrow{\sim} H_c^*(O \times N) \otimes H_c^*(N)$$

Comme par hypothèse les applications  $\kappa_c : H_c^*(O_{\alpha}) \otimes H_c^*(N) \rightarrow H_c^*(O_{\alpha} \times N)$  sont des isomorphismes, le lemme est démontré. ■

**Lemme 3.90**

Si  $\mathcal{B}$  est une base dénombrable stable par intersections finies de  $M$  et si  $\kappa_c : H_c^*(O) \otimes_{\mathbb{R}} H_c^*(N) \rightarrow H_c^*(O \times N)$  est un isomorphisme pour tout  $O \in \mathcal{B}$  alors il en est de même pour tout ouvert  $O$  de  $M$ .

Démonstration :

Il suffit d'appliquer les deux lemmes précédents et 3.73. ■

Démonstration du théorème de Künneth à support compact :

Premier cas :  $M$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $N$  quelconque

Les ensembles  $O = \{x \in \mathbb{R}^n, a_i < x_i < b_i\}$  forment une base stable par intersections finies pour la topologie usuelle de  $\mathbb{R}^n$  et sont difféomorphes à  $\mathbb{R}^n$ , ainsi, d'après le lemme de Poincaré, le théorème est vrai pour ces ouverts. On déduit du lemme précédent, que le théorème est vrai pour  $M$ .

Second cas :  $M$  et  $N$  quelconques

Soit  $\mathcal{B}$  une base dénombrable de  $M$  stable par intersections finies et dont les ouverts sont difféomorphes à des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  (voir la preuve de la dualité de Poincaré pour l'existence). Alors d'après le point précédent, le résultat est vrai pour chaque élément de la base de  $M$  et donc pour tout ouvert de  $M$  d'après le lemme précédent, et donc en particulier pour  $M$ . ■

Cette preuve ne se généralise pas à la cohomologie de de Rham (sans support compact) puisque la cohomologie de de Rham d'une union disjointe est cette fois un produit direct et non plus une somme directe. Cependant nous avons le théorème suivant :

**Théorème 3.91 : théorème de Künneth**

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles telles que  $\dim H^*(M) < \infty$  ou  $\dim H^*(N) < \infty$ .

Alors  $\kappa : H^*(M) \otimes H^*(N) \rightarrow H^*(M \times N)$  est un isomorphisme.

**Lemme 3.92**

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles orientées et munissons  $M \times N$  de l'orientation produit. Alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(M) \otimes H^*(N) & \xrightarrow{\kappa} & H^*(M \times N) \\
 \downarrow (\mathcal{D}_M \otimes \mathcal{D}_N) \circ \varepsilon \sim & & \downarrow \sim \mathcal{D}_{M \times N} \\
 H_c^*(M)^* \otimes H_c^*(N)^* & & H_c^*(M \times N)^* \\
 & \searrow i & \swarrow \kappa_c^* \\
 & (H_c^*(M) \otimes H_c^*(N))^* &
 \end{array}$$

où les applications  $\mathcal{D}$  sont celles de la dualité de Poincaré, où  $\varepsilon$  est l'automorphisme linéaire de  $H^*(M) \otimes H^*(N)$  donné par  $\varepsilon(\alpha \otimes \beta) = (-1)^{(\dim M - \deg \alpha) \deg \beta} \alpha \otimes \beta$  et où  $i$  est l'inclusion usuelle.

Démonstration :

Il suffit d'appliquer le théorème de Fubini pour les variétés (2.75) puisque  $\kappa(\omega \otimes \eta) = \omega \times \eta$  sur les formes différentielles. ■

Démonstration du théorème de Künneth :
Premier cas : si  $M$  et  $N$  sont orientables

D'après le lemme précédent, puisque  $\kappa_c$  est un isomorphisme, nous devons juste montrer que l'inclusion  $i$  est surjective, ce qui est bien le cas puisque  $H_c^*(M)^* \simeq H^*(M)$  ou  $H_c^*(N) \simeq H^*(N)$  est de dimension finie.

Deuxième cas : si  $M$  n'est pas orientable et si  $N$  est orientable

Soit  $p : \overline{M} \rightarrow M$  le revêtement orientable à deux feuillet de  $M$ . Alors  $\overline{M} \times N$  est un revêtement orientable à deux feuillet de  $M \times N$ . Considérons  $\tau : \overline{M} \rightarrow \overline{M}$  l'automorphisme de revêtement non trivial.

Le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(\overline{M}) \otimes H^*(N) & \xrightarrow[\simeq]{\kappa} & H^*(\overline{M} \times N) \\
 \tau^* \otimes id \uparrow & & \uparrow (\tau \times id)^* \\
 H^*(\overline{M}) \otimes H(n) & \xrightarrow[\kappa]{\simeq} & H^*(\overline{M} \times N)
 \end{array}$$

Et donc  $\kappa$  se restreint en un isomorphisme  $\kappa : H_+^*(\overline{M}) \otimes H^*(N) \rightarrow H_+(\overline{M} \times N)$  ( $[\omega] \in H_+^*(\overline{M})$  si  $\tau^* \omega = \omega$ ).

Nous obtenons donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 H_+^*(\overline{M}) \otimes H^*(N) & \xrightarrow[\simeq]{\kappa} & H_+(\overline{M} \times N) \\
 p^* \otimes id \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq (p \times id)^* \\
 H^*(M) \otimes H(n) & \xrightarrow[\kappa]{} & H^*(M \times N)
 \end{array}$$

Ce qui permet de conclure.

Les deux autres cas se démontrent de la même façon. ■

Exemple 3.93 : cohomologie du tore

Considérons le tore  $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  alors  $H^*(T) = H^*(\mathbb{S}^1) \otimes H^*(\mathbb{S}^1)$ .

Plus précisément :  $H^n(T) = \begin{cases} 2 & \text{si } n=1 \\ 1 & \text{si } n=0, 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . ■

Application 3.94 : polynômes de Poincaré

Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $n$  dont la cohomologie (resp. à support compact) est de dimension finie.

On pose  $p_M(t) = \sum_{i=0}^n b_i(M)t^i$  le polynôme de Poincaré (resp.  $p_{M,c}(t) = \sum_{i=0}^n b_{i,c}(M)t^i$ ) le polynôme de Poincaré (resp. à support compact) de  $M$  où les coefficients sont les nombres de Betti :  $b_i(M) = \dim H^i(M)$  (resp.  $b_{i,c}(M) = \dim H_c^i(M)$ ).  
 On déduit de la formule de Künneth que  $p_{M \times N} = p_M p_N$  (resp.  $p_{M \times N, c} = p_{M, c} p_{N, c}$ ). ■

### 3.11

## Applications

#### 3.11.1

### Théorème du point fixe de Brouwer

Nous fixons les notations suivantes  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}$  et  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$ . La notation  $x \cdot y$  désigne le produit scalaire usuel.

**Théorème 3.95 : théorème du point fixe de Brouwer**

Toute application continue  $f : D^n \rightarrow D^n$  admet un point fixe.

**Lemme 3.96**

Il n'existe pas d'application continue  $g : D^n \rightarrow S^{n-1}$  telle que  $g|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$ .  
 ie il n'existe pas de rétraction de  $D^n$  dans  $S^{n-1}$ .

Démonstration :

Si  $n = 1$  c'est immédiat ( $g : [-1, 1] \rightarrow \{\pm 1\}$  continue est constante par connexité de  $[-1, 1]$ ).

Supposons  $n \geq 2$ . L'application  $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$   
 $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$  est homotope à  $id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$

puisque le segment joignant  $x$  à  $\frac{x}{\|x\|}$  est inclus dans  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  (voir 3.41).

Supposons par l'absurde qu'un tel  $g$  existe alors  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$   
 $(x, t) \mapsto g(t \cdot r(x))$  définit

une homotopie entre une application constante et  $r$ . Donc  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  serait contractile. Or on sait qu'il n'a pas la même cohomologie que le point. D'où une contradiction. ■

Démonstration du théorème du point fixe de Brouwer

Supposons par l'absurde l'existence d'une application continue  $f : D^n \rightarrow D^n$  sans point fixe. Pour tout  $x \in D^n$  on définit  $g(x) \in S^{n-1}$  comme l'intersection de  $S^{n-1}$  avec la demi-droite  $[f(x), x)$ .

Posons  $u(x) = \frac{x-f(x)}{\|x-f(x)\|}$ ,  $(x+tu) \cdot (x+tu)$  admet deux solutions puisque la droite  $(f(x), x)$  intersecte  $S^{n-1}$  en deux points. Nous ne nous intéressons qu'à la solution  $t \geq 0 : t = -x \cdot u + \sqrt{1 - \|x\|^2 + (x \cdot u)^2}$ . Ainsi  $g(x) = x + t(x)u(x)$  est continue et vérifie  $g|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$  d'où une contradiction avec le lemme précédent. ■

#### 3.11.2

### Théorème de la boule chevelue

D'après 1.33, si  $x \in S^n$  alors  $T_x S^n = \{y \in \mathbb{R}^{n+1}, x \cdot y = 0\}$ . Un champ de vecteurs de  $S^n$  est donc une application continue  $X : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  telle que  $X(x) \cdot x = 0$  pour tout  $x$ .

**Théorème 3.97 : théorème de la boule chevelue**

La sphère  $S^n$  admet un champ de vecteurs partout non nul si et seulement si  $n$  est impair.

Démonstration :

Si  $n = 2m + 1$  alors  $X(x_0, \dots, x_{2m+1}) = (-x_1, x_0, \dots, -x_{2m+1}, x_{2m})$  convient.

Réciproquement, supposons qu'un tel champ de vecteurs  $X$  existe, alors il s'étend en une application continue sur  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  par  $\tilde{X}(x) = X\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ .

Nous avons pour tout  $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  :  $\tilde{X}(x) \neq 0$  et  $\tilde{X}(x) \cdot x = 0$ .

L'application  $H : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \times [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ (x, t) & \longmapsto & \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)\tilde{X}(x) \end{array}$  est une homotopie

entre  $f_0 = id_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$  et l'application antipodale  $f_1(x) = -x$ , donc  $f_0^* = f_1^* : H^n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \rightarrow H^n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ . Or  $f_0^* = id$  et  $f_1^* = (-1)^{n+1}id$ , donc  $n$  est impair. ■

## 4

## Cohomologie de Čech

## 4.1

## Cohomologie de Čech relative à un recouvrement

## Définition 4.1 : préfaisceau

Un préfaisceau sur un espace topologique  $X$  est un foncteur  $\mathcal{F}$  contravariant de la catégorie des ouverts de  $X$  pour les morphismes inclusion dans la catégorie des groupes abéliens envoyant l'objet initial  $\emptyset$  sur l'objet terminal  $\{0\}$ .

Remarque 4.2 : les préfaisceaux peuvent posséder des structures plus riches que celles des groupes abéliens.

De façon équivalente :

## Caractérisation 4.3

Un préfaisceau  $\mathcal{F}$  sur un espace topologique  $X$  est la donnée pour tout ouvert  $U$  de  $X$  d'un groupe abélien  $\mathcal{F}(U)$  et pour toute inclusion d'ouverts  $i_V^U : U \hookrightarrow V$  d'un morphisme de groupes  $\mathcal{F}(i_V^U) : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$  vérifiant :

- (i)  $\mathcal{F}(i_U^U) = id_{\mathcal{F}(U)}$ .
- (ii) Si  $U \subset V \subset W$  alors  $\mathcal{F}(i_V^U)\mathcal{F}(i_W^V) = \mathcal{F}(i_W^U)$ .
- (iii)  $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$ .

Remarques 4.4 :

- On notera  $\rho_U^V = \mathcal{F}(i_V^U)$  et on parlera de *morphisme de restriction*.
- Un élément de  $\mathcal{F}(U)$  est une section de  $\mathcal{F}$  au-dessus de  $U$  et un élément de  $\mathcal{F}(X)$  est une section globale de  $\mathcal{F}$ .
- Le *préfaisceau constant* associé au groupe  $G$  est le préfaisceau qui envoie tout ouvert  $U$  de  $X$  sur  $G$  et tel que les restrictions sont l'identité de  $G$ .

Un morphisme de préfaisceaux sur  $X$  est une transformation naturelle de foncteurs, ie :

## Définition 4.5 : morphisme de préfaisceaux

Un morphisme  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  de préfaisceaux est la donnée, pour tout ouvert  $U$  de  $X$  de morphismes de groupes  $f_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  commutant avec les restrictions, ie pour tout couple d'ouverts  $(U, V)$ , le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_V^U \downarrow & & \downarrow \rho_V^U \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{f_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Soit  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathcal{A}}$  un recouvrement ouvert d'un espace topologique  $X$  avec  $U_i \neq \emptyset$ . Notons  $U_{i_0 \dots i_p} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$  et plus généralement si  $J \subset I$ ,  $U_J = \bigcap_{i \in J} U_i$ .

## Définition 4.6 : nerf d'un recouvrement

Le nerf de  $\mathcal{U}$  est l'ensemble :

$$N(\mathcal{U}) = \{A \subset \mathcal{A}, A \neq \emptyset, \#A < \infty, U_A \neq \emptyset\}$$

Remarques 4.7 :

- Une partie  $A \in N(\mathcal{U})$  est une face du nerf et une partie non vide d'une face est encore une face, on a donc un complexe simplicial abstrait.
- Si  $A \subset B$  sont des faces, alors  $U_A \supset U_B$ .

Définition 4.8 : simplexe du nerf  $N(\mathcal{U})$

Soit  $p \in \mathbb{N}$ , un  $p$ -simplexe du nerf  $N(\mathcal{U})$  est une application  $\sigma : \begin{array}{ccc} \Delta_p & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ j & \longmapsto & \sigma_j \end{array}$  dont l'image est une face et où  $\Delta_p = \{0, 1, \dots, p\}$ . On pourra aussi noter  $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_p)$ . On note  $S_p(\mathcal{U})$  l'ensemble des  $p$ -simplexes de  $N(\mathcal{U})$ .

Remarque 4.9 : l'image d'un  $p$ -simplexe  $\sigma$  est nommée *support de  $\sigma$*  et est notée  $|\sigma|$ .

Définition 4.10 : bords partiels d'un simplexe

Si  $\sigma \in S_p(\mathcal{U})$ , pour  $j = 0, \dots, p$ , on note  $\partial_j \sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_p) \in S_{p-1}(\mathcal{U})$  le  $j$ -ème bord partiel de  $\sigma$ .

On va définir une  $p$ -cochaîne de  $\mathcal{U}$  à coefficients dans un préfaisceau  $\mathcal{F}$  comme une application qui à un  $p$ -simplexe  $\sigma$  associe un élément de  $\mathcal{F}(U_{|\sigma|})$ .

Définition-Proposition 4.11 : le complexe de Čech

Soit  $X$  un espace topologique,  $\mathcal{U}$  un recouvrement ouvert de  $X$  et  $\mathcal{F}$  un préfaisceau sur  $X$ .

Posons pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , le produit direct de groupes  $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\sigma \in S_p(\mathcal{U})} \mathcal{F}(U_{|\sigma|})$ .

Un élément  $\omega \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  s'écrit  $\omega = (\omega_\sigma)_{\sigma \in S_p(\mathcal{U})}$  où  $\omega_\sigma \in \mathcal{F}(U_{|\sigma|})$ .

On définit les opérateurs de cobord  $\delta^p : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  par  $(\delta\omega)_\sigma =$

$$\sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \rho_{U_{|\partial_i \sigma|}}^{U_{|\partial_i \sigma|}}(\omega_{\partial_i \sigma}) \text{ où } \sigma \in S_{p+1}(\mathcal{U}).$$

Nous obtenons ainsi le complexe (de cochaînes) de Čech  $(C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \delta^*)$  de  $\mathcal{U}$  à coefficients dans  $\mathcal{F}$ .

La cohomologie de ce complexe notée  $H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  se nomme la cohomologie de Čech de  $\mathcal{U}$  à coefficients dans  $\mathcal{F}$ .

Remarque 4.12 : attention, il s'agit d'un complexe de groupes et non de modules. Toutes les définitions et notions sur les complexes de modules de la partie 3.1 s'adaptent ici.

Démonstration :

▮ Nous devons vérifier que  $\delta^2 = 0$ .

Soient  $\omega \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  et  $\sigma \in S_{p+2}(\mathcal{U})$ , alors :

$$\begin{aligned}
 [\delta(\delta\omega)]_\sigma &= \sum_{i=0}^{p+2} (-1)^i \rho_{U_{|\sigma|}}^{U_{|\partial_i \sigma|}}([\delta\omega]_{\partial_i \sigma}) \\
 &= \sum_{i=0}^{p+2} (-1)^i \rho_{U_{|\sigma|}}^{U_{|\partial_i \sigma|}} \left( \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \rho_{U_{|\partial_i \sigma|}}^{U_{|\partial_j \partial_i \sigma|}}(\omega_{\partial_j \partial_i \sigma}) \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{p+2} \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^i (-1)^j \rho_{U_{|\sigma|}}^{U_{|\partial_j \partial_i \sigma|}}(\omega_{\partial_j \partial_i \sigma}) \\
 &= \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j \rho_{U_{|\sigma|}}^{U_{|(\sigma_0, \dots, \widehat{\sigma}_j, \dots, \widehat{\sigma}_i, \dots, \sigma_{p+2})|}}(\omega_{(\sigma_0, \dots, \widehat{\sigma}_j, \dots, \widehat{\sigma}_i, \dots, \sigma_{p+2})}) \\
 &\quad + \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^{j-1} \rho_{U_{|\sigma|}}^{U_{|(\sigma_0, \dots, \widehat{\sigma}_i, \dots, \widehat{\sigma}_j, \dots, \sigma_{p+2})|}}(\omega_{(\sigma_0, \dots, \widehat{\sigma}_i, \dots, \widehat{\sigma}_j, \dots, \sigma_{p+2})}) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Remarque 4.13 :

On peut remplacer le complexe de Čech par des complexes homotopes et plus petits. Considérons  $C_{\text{alt}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  le sous-groupe de  $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  dont les éléments sont ceux de la forme  $(\omega_\sigma)_{\sigma \in S_p(\mathcal{U})}$  où pour toute permutation  $\varphi : \Delta_p \rightarrow \Delta_p$  et pour tout  $\sigma \in S_p(\mathcal{U})$ ,  $\omega_{\sigma \circ \varphi} = \varepsilon(\varphi)\omega_\sigma$ . Cela implique que si  $\sigma : \Delta_p \rightarrow \mathcal{A}$  est un  $p$ -simplexe non injectif alors  $\omega_\sigma = 0$ .

On peut vérifier que  $\delta : C_{\text{alt}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C_{\text{alt}}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ , de sorte à ce que  $(C_{\text{alt}}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \delta)$  est un sous-complexe de  $(C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \delta)$ . On parle du *complexe des cochaînes alternées de Čech relativement au recouvrement  $\mathcal{U}$  et à valeurs dans  $\mathcal{F}$* .

Si  $\preccurlyeq$  est un ordre total sur  $\mathcal{A}$ , on pose  $\vec{S}_q(\mathcal{U}) = \{\sigma \in S_q(\mathcal{U}), i < j \Rightarrow \sigma_i \preccurlyeq \sigma_j\}$ . On pose alors  $\vec{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\sigma \in \vec{S}_p(\mathcal{U})} \mathcal{F}(U_{|\sigma|})$ , on définit  $\delta$  de façon similaire de sorte à obtenir un nouveau

complexe  $(\vec{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \delta)$ , nommé *complexe des cochaînes ordonnées de Čech relativement au recouvrement  $\mathcal{U}$  et à valeurs dans  $\mathcal{F}$* .

La projection  $\pi : \prod_{\sigma \in S_p(\mathcal{U})} \mathcal{F}(U_{|\sigma|}) \rightarrow \prod_{\sigma \in \vec{S}_p(\mathcal{U})} \mathcal{F}(U_{|\sigma|})$  induit un morphisme de complexes

$$\pi : (C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \delta) \rightarrow (\vec{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \delta).$$

De plus la restriction de  $\pi$  au sous-complexe  $(C_{\text{alt}}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \delta)$  induit un isomorphisme de complexes  $\pi : (C_{\text{alt}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \delta) \rightarrow (\vec{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \delta)$ .

On montre que l'inclusion  $C_{\text{alt}}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \hookrightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  est une équivalence d'homotopie de complexes (voir par exemple <http://math.stanford.edu/~conrad/papers/cech.pdf>).

Ainsi  $\pi : C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \vec{C}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  est une équivalence d'homotopie.

Au final ces trois complexes donnent la cohomologie de Čech et on nomme aussi le complexe  $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ , le *complexe des cochaînes singulières de Čech relativement au recouvrement  $\mathcal{U}$  et à valeurs dans  $\mathcal{F}$* .

L'intérêt du complexe des cochaînes alternées sur celui des cochaînes ordonnées est que l'ordre des indices n'apparaît plus, ce qui facilite l'utilisation de raffinements de recouvrements. L'intérêt du complexe des cochaînes singulières sur celui des cochaînes alternées est de pouvoir utiliser des raffinements non injectifs. ■

## 4.2 Cohomologie des bicomplexes de modules

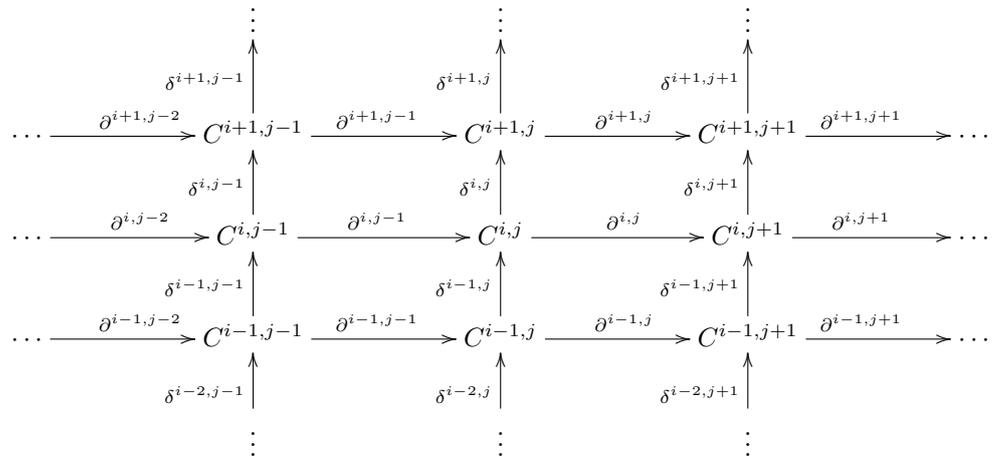
Dans toute cette partie, nous considérons des modules sur un anneau  $A$ .

Un bicomplexe de cochaînes est la donnée d'un triplet  $(C^{*,*}, \partial^{*,*}, \delta^{*,*})$  où  $C^{*,*}$  est un  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -module gradué et les  $\partial^{i,j} : C^{i,j} \rightarrow C^{i,j+1}$  et  $\delta^{i,j} : C^{i,j} \rightarrow C^{i+1,j}$  sont des morphismes de modules tels que :

- $\forall i_0, j_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $(C^{i_0,*}, \partial^{i_0,*})$  et  $(C^{*,j_0}, \delta^{*,j_0})$  sont des complexes de cochaînes.
- $\forall i, j \in \mathbb{Z}$ ,  $\delta^{i,j+1} \circ \partial^{i,j} = \partial^{i+1,j} \circ \delta^{i,j}$ .

Remarquons que la condition (b) est équivalente aux conditions suivantes :

(b<sub>1</sub>)  $\forall i_0 \in \mathbb{Z}, \delta^{i_0,*}$  est un morphisme de complexes de cochaînes  $(C^{i_0,*}, \partial^{i_0,*}) \rightarrow (C^{i_0+1,*}, \partial^{i_0+1,*})$ .  
 (b<sub>2</sub>)  $\forall j_0 \in \mathbb{Z}, \partial^{*,j_0}$  est un morphisme de complexes de cochaînes  $(C^{*,j_0}, \delta^{*,j_0}) \rightarrow (C^{*,j_0+1}, \delta^{*,j_0+1})$ .  
 Cela revient à dire que l'on a le diagramme commutatif suivant dont les lignes et les colonnes sont des complexes de cochaînes :



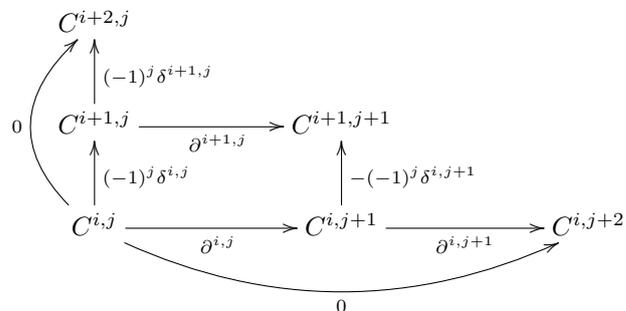
Un morphisme entre bicomplexes  $f : (C^{*,*}, \partial, \delta) \rightarrow (D^{*,*}, \partial, \delta)$  est la donnée d'une famille de morphismes de modules  $(f^{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}, f^{i,j} : C^{i,j} \rightarrow D^{i,j}$  commutant aux opérateurs  $\partial$  et  $\delta$ .  
 On obtient ainsi la catégorie des bicomplexes de cochaînes sur  $A$ , notée  $K(A)^{*,*}$ .

Nous allons désormais construire un foncteur  $\Sigma : K(A)^{*,*} \rightarrow K(A)^*$ .

Considérons  $(C^{*,*}, \partial, \delta)$  un bicomplexe, et posons pour tout  $n \in \mathbb{Z}, C^k = \bigoplus_{i+j=k} C^{i,j}$  ainsi

que  $D^k : C^k \rightarrow C^{k+1}$  qui à  $x \in C^{i,j}, i+j=k$ , associe  $D^k(x) = \partial^{i,j}(x) + (-1)^j \delta^{i,j}(x) \in C^{i,j+1} \oplus C^{i+1,j}$ .

Alors  $D^{k+1} \circ D^k = 0$  (d'où l'importance du  $(-1)^j$ ), comme l'illustre le diagramme suivant :



On obtient ainsi un complexe de cochaînes  $(C^*, D^*)$  nommé *complexe simple*.

Maintenant si  $f^{*,*} : C^{*,*} \rightarrow E^{*,*}$  est un morphisme de bicomplexes, en conservant son action sur chaque facteur direct de  $C^*$ , on obtient  $f : C^* \rightarrow E^*$  vérifiant  $f^{k+1} \circ D^k = D^k \circ f^k$ . La correspondance  $\Sigma : K(A)^{*,*} \rightarrow K(A)^*$  est ainsi fonctorielle.

**Définition 4.14 : cohomologie d'un bicomplexe**

On appelle cohomologie d'un bicomplexe la cohomologie de son complexe simple associé.

Nous nous intéressons désormais à la sous-catégorie pleine  $K(A)^{+,+}$  de  $K(A)^{*,*}$  des bicomplexes du premier quadrant, c'est-à-dire les bicomplexes  $(C^{*,*}, \partial, \delta)$  vérifiant  $(i, j) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Rightarrow A^{i,j} = \{0\}$ .

Une sous-catégorie  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{C}$  est pleine si le foncteur d'inclusion est plein, ie si  $\forall X, Y \in \text{Ob } \mathcal{D}, \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ .

**Lemme 4.15**

Soit  $C^{*,*}$  un bicomplexe du premier quadrant dont toutes les lignes (resp. colonnes) sont exactes, alors tout élément de  $H_D^k(C^*)$  admet un représentant dans  $C^{k,0}$  (resp.  $C^{0,k}$ ).

Démonstration :

Nous ne traitons que le cas d'un bicomplexe du premier quadrant dont les lignes sont exactes, l'autre cas se traite de manière analogue.

Soit  $x \in Z^k(C^*) \subset C^k = \bigoplus_{i+j=k} C^{i,j}$ , alors  $x = (x^{i,j})_{i+j=k}$  avec  $Dx = 0$ , ie  $\delta x^{k,0} = 0$ ,  $\partial x^{0,k} = 0$  et  $\partial(x^{i,j}) + (-1)^j \delta(x^{i,j}) = 0$ , où  $i > 0, j > 0$  et  $i + j = k$ , en remarquant que les coordonnées de  $x$  forment une antidiagonale comme l'illustre le schéma (I) suivant :

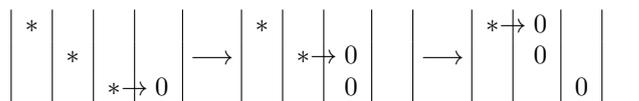
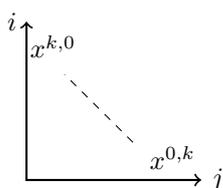


Schéma (I) | Schéma (II) : schéma de la preuve du lemme pour  $k = 3$ .  
 Par exactitude des lignes, il existe  $z \in C^{0,k-1}$  tel que  $x^{0,k} = \partial z$  et alors  $x - Dz$  a la même classe de  $D$ -cohomologie que  $x$  mais sa coordonnée dans  $C^{0,k}$  est nulle. En itérant ce procédé comme dans le schéma (II), nous obtenons un représentant  $\tilde{x} \in C^{k,0} \subset \bigoplus_{i+j=k} C^{i,j}$  de la classe de  $D$ -cohomologie  $[x]$ . ■

**Corollaire 4.16**

Soit  $(C^{*,*}, \partial, \delta)$  un bicomplexe du premier quadrant. Supposons que sa cohomologie horizontale (resp. verticale) soit nulle alors le complexe simple  $\Sigma(C^{*,*}) = (C^*, D^*)$  associé est exact.

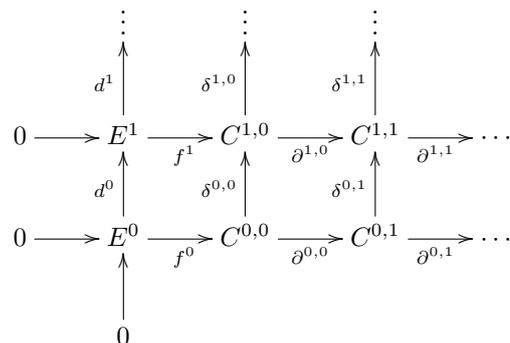
Remarque 4.17 : La cohomologie horizontale (resp. verticale) d'un bicomplexe est nulle si et seulement ses lignes (resp. colonnes) sont exactes.

Démonstration :

De même, nous ne réalisons la démonstration seulement dans le cas où la cohomologie horizontale est nulle, l'autre cas se démontre de façon similaire.

D'après le lemme 4.15, on peut trouver un représentant de  $[x] \in H_D^k(C^*)$  dans  $C^{k,0}$ , alors  $0 = Dx = \partial x + \delta x \in C^{k,1} \oplus C^{k+1,0}$ , par exactitude des lignes,  $\partial^{k,0}$  est injectif et donc  $x = 0$ . ■

Soient  $(C^{*,*}, \partial, \delta)$  un bicomplexe de cochaînes du premier quadrant,  $(E^*, d)$  un complexe de cochaînes vérifiant  $k < 0 \Rightarrow E^k = 0$  et  $f^k : E^k \rightarrow C^{k,0}$  des morphismes de modules vérifiant  $\delta^{k,0} \circ f^k = f^{k+1} \circ d^k$ . Alors le bicomplexe  $(C^{*,*}, \partial, \delta)$  augmenté par la colonne  $(E^*, d)$  est la donnée du diagramme suivant :



De la même façon, nous avons la notion de bicomplexe augmenté par une ligne.

Il existe alors un morphisme de complexes de cochaînes naturel  $\psi : E^* \rightarrow C^* = \Sigma(C^{*,*})$  envoyant  $x \in E^k$  sur  $\psi(x) = (f^k(x), 0) \in C^k = C^{k,0} \oplus \bigoplus_{i=1}^k C^{i,k-i}$ .

**Proposition 4.18**

Si toutes les lignes (resp. colonnes) d'un bicomplexe  $C^{*,*}$  augmenté d'une colonne (resp. ligne)  $E^*$  sont exactes alors  $\psi$  est un quasi-isomorphisme. Dans ce cas  $C^* = \Sigma(C^{*,*})$  et  $E^*$  ont même cohomologie.

Démonstration :

Nous ne démontrerons que le cas d'un bicomplexe augmenté d'une colonne, l'autre cas étant similaire.

Montrons que  $H^*(\psi)$  est surjectif : soit  $[x] \in H_D^k(C^*)$ , on peut supposer avec un raisonnement analogue à celui de la démonstration du lemme 4.15 que  $x \in C^{k,0}$  avec  $Dx = 0$  ie  $\partial x = 0$  et  $\delta x = 0$ . Par exactitude des lignes,  $x = f^k(y)$  pour un certain  $y \in E^k$ . Puis  $0 = \delta x = \delta f^k(y) = f^{k+1}(dy) \Rightarrow dy = 0$  vu que  $f^{k+1}$  est injective par exactitude des lignes, donc  $y \in Z_d^k(E^*)$ . Ainsi  $[x] = H^*(\psi)([y])$ .

Montrons que  $H^*(\psi)$  est injectif : soit  $x \in Z_d^k(E^*)$  tel que  $\psi(x) = (f^k(x), 0) \in B_D^k(C^*)$ , ie  $\psi(x) = Dz$  pour un certain  $z \in C^{k-1}$ . Alors  $\delta z^{k-1,0} = f^k(x)$ ,  $\partial z^{i,j} + (-1)^j \delta z^{i,j} = 0$  pour  $i+j = k+1$  et  $j > 0$ ,  $\partial z^{0,k-1} = 0$ . On peut donc utiliser un argument similaire à celui de la démonstration du lemme 4.15 et supposer que  $z \in C^{k-1,0}$ . Dans ce cas  $\delta z = f^k(x)$  et  $\partial z = 0$  et donc par exactitude des lignes, il existe  $y \in E^{k-1}$  tel que  $z = f^{k-1}(y)$ . Ensuite, nous avons  $f^k(dy) = \delta f^{k-1}(y) = \delta z = f^k(x)$ , et par injectivité de  $f^{k-1}$ ,  $x = dy$ , donc  $x \in B_d^k(E^*)$ . D'où l'injectivité de  $H^*(\psi)$ . ■

**Proposition 4.19**

Si un morphisme  $f : C^{*,*} \rightarrow E^{*,*}$  de bicomplexes du premier quadrant est un  $\delta$ -quasi-isomorphisme (resp.  $\partial$ -quasi-isomorphisme) alors c'est aussi un  $D$ -quasi-isomorphisme.

## 4.3 Complexe de Čech-de Rham

Soit  $M$  une variété différentielle lisse et  $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  un recouvrement ouvert de  $M$ . Pour tout  $q \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega^q$  est un foncteur contravariant de la catégorie des ouverts de  $M$  dans la catégorie des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et la construction du complexe de Čech pour le préfaisceau  $\Omega^q$  permet d'obtenir le complexe de cochaînes de  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels suivant

$$\prod_{\sigma \in S_0(\mathcal{U})} \Omega^p(U_{|\sigma|}) \xrightarrow{\delta} \prod_{\sigma \in S_1(\mathcal{U})} \Omega^p(U_{|\sigma|}) \xrightarrow{\delta} \prod_{\sigma \in S_2(\mathcal{U})} \Omega^p(U_{|\sigma|}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

où  $C^q(\mathcal{U}, \Omega^p) = \prod_{\sigma \in S_q(\mathcal{U})} \Omega^p(U_{|\sigma|})$  et où les opérateurs de cobord sont donnés par

$$(\delta\omega)_{\sigma=(\sigma_0, \dots, \sigma_{p+1})} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\sigma_0, \dots, \widehat{\sigma}_i, \dots, \sigma_{p+1}|_{U_{|\sigma|}}}.$$

On a donc le bicomplexe suivant, nommé *bicomplexe de Čech-de Rham*, où les opérateurs

de cobord verticaux correspondent à la différentielle extérieure sur chaque composante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
 C^0(\mathcal{U}, \Omega^2) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathcal{U}, \Omega^2) & \xrightarrow{\delta} & C^2(\mathcal{U}, \Omega^2) & \xrightarrow{\delta} & \dots \\
 \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
 C^0(\mathcal{U}, \Omega^1) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathcal{U}, \Omega^1) & \xrightarrow{\delta} & C^2(\mathcal{U}, \Omega^1) & \xrightarrow{\delta} & \dots \\
 \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
 C^0(\mathcal{U}, \Omega^0) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathcal{U}, \Omega^0) & \xrightarrow{\delta} & C^2(\mathcal{U}, \Omega^0) & \xrightarrow{\delta} & \dots
 \end{array}$$

et dont le complexe simple associé est le *complexe de Čech-de Rham*.

Remarque 4.20 : on a bien la commutativité de  $\delta$  et de  $d$ .

L'opérateur de cobord du complexe simple  $\Sigma(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*))$  est donné par  $D = \delta + (-1)^p d$  sur  $C^p(\mathcal{U}, \Omega^q)$ .

Proposition 4.21 : la suite généralisée de Mayer-Vietoris

La suite de complexes de cochaînes

$$0 \rightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{r} C^0(\mathcal{U}, \Omega^*) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U}, \Omega^*) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathcal{U}, \Omega^*) \xrightarrow{\delta} \dots$$

est exacte, où  $r$  est la restriction des formes différentielles sur chaque composante ( $[r(\omega)]_\sigma = \omega|_{U|\sigma}$ ).

Démonstration :

Nous devons montrer l'exactitude de la suite  $0 \rightarrow \Omega^q(M) \xrightarrow{r} C^0(\mathcal{U}, \Omega^q) \xrightarrow{\delta^0} C^1(\mathcal{U}, \Omega^q) \xrightarrow{\delta^1} C^2(\mathcal{U}, \Omega^q) \xrightarrow{\delta^2} \dots$ .

Il est évident que  $\ker \delta^0 = r(\Omega^q(M))$  puisqu'un élément de  $C^0(\mathcal{U}, \Omega^q) = \prod_{\sigma \in S_0(\mathcal{U})} \Omega^q(U|\sigma)$  est

une forme globale si et seulement si ses composantes sont égales sur les intersections.

Maintenant soit  $(\rho_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  une partition de l'unité subordonnée au recouvrement  $\mathcal{U}$ , et soit  $\omega \in Z^p(C^*(\mathcal{U}, \Omega^q))$ .

Posons  $\tau \in C^{p-1}(\mathcal{U}, \Omega^q)$  définie par  $\tau_{(\sigma_0 \dots \sigma_{p-1})} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \rho_\alpha \omega_{(\alpha, \sigma_0, \dots, \sigma_{p-1})}$  alors  $(\delta\tau)_{\sigma_0, \dots, \sigma_p} =$

$$\sum_{i=0}^p (-1)^i \tau_{(\sigma_0, \dots, \widehat{\sigma}_i, \dots, \sigma_p)} = \sum_{i, \alpha} (-1)^i \rho_\alpha \omega_{(\alpha, \sigma_0, \dots, \widehat{\sigma}_i, \dots, \sigma_p)}.$$

Puis comme  $\omega$  est un cocycle,  $0 = (\delta\omega)_{(\alpha, \sigma_0, \dots, \sigma_p)} = \omega_{\sigma_0, \dots, \sigma_p} + \sum_{i=0}^p (-1)^{i+1} \omega_{(\alpha, \sigma_0, \dots, \widehat{\sigma}_i, \dots, \sigma_p)}$ .

Et donc,  $(\delta\tau)_{(\sigma_0, \dots, \sigma_p)} = \sum_{\alpha} \rho_\alpha \omega_{(\alpha, \sigma_0, \dots, \sigma_p)} = \omega_{(\sigma_0, \dots, \sigma_p)}$ .

Ainsi tout cocycle est un cobord. ■

Remarque 4.22 :

Dans la preuve précédente,  $\tau$  définit en fait un opérateur d'homotopie entre l'identité et l'application nulle.

Définissons  $K : C^p(\mathcal{U}, \Omega^q) \rightarrow C^{p-1}(\mathcal{U}, \Omega^q)$  par  $(K\omega)_{(\sigma_0 \dots \sigma_{p-1})} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \rho_\alpha \omega_{(\alpha, \sigma_0, \dots, \sigma_{p-1})}$  alors :

$$(\delta K\omega)_{(\sigma_0, \dots, \sigma_p)} = \sum (-1)^i \rho_\alpha \omega_{(\alpha, \sigma_0, \dots, \widehat{\sigma}_i, \dots, \sigma_p)} \text{ et } (K\delta\omega)_{(\sigma_0, \dots, \sigma_p)} = \sum \rho_\alpha (\delta\omega)_{(\alpha, \sigma_0, \dots, \sigma_p)} =$$

$$(\sum \rho_\alpha) \omega_{(\sigma_0, \dots, \sigma_p)} + \sum (-1)^{i+1} \rho_\alpha \omega_{(\alpha, \sigma_0, \dots, \widehat{\sigma}_i, \dots, \sigma_p)} = \omega_{(\sigma_0, \dots, \sigma_p)} - (\delta K\omega)_{(\sigma_0, \dots, \sigma_p)}.$$

Donc  $\delta K + K\delta = id$ . ■

**Proposition 4.23**

Pour toute variété différentielle  $M$ , pour tout recouvrement ouvert  $\mathcal{U}$ ,  $r : \Omega^*(M) \rightarrow \Sigma(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*))$  est un quasi-isomorphisme :  $r^* : H_{DR}^*(M) \xrightarrow{\sim} H_D(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*))$  où  $H_D(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*))$  est la cohomologie du bicomplexe de Čech-de Rham.

Démonstration :

La cohomologie horizontale du bicomplexe de Čech-de Rham augmenté d'une colonne  $0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots$  est nulle, d'après la proposition précédente.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^2(M) & \xrightarrow{r} & C^0(\mathcal{U}, \Omega^2) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathcal{U}, \Omega^2) & \xrightarrow{\delta} & C^2(\mathcal{U}, \Omega^2) & \xrightarrow{\delta} & \dots \\
 & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^1(M) & \xrightarrow{r} & C^0(\mathcal{U}, \Omega^1) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathcal{U}, \Omega^1) & \xrightarrow{\delta} & C^2(\mathcal{U}, \Omega^1) & \xrightarrow{\delta} & \dots \\
 & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^0(M) & \xrightarrow{r} & C^0(\mathcal{U}, \Omega^0) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathcal{U}, \Omega^0) & \xrightarrow{\delta} & C^2(\mathcal{U}, \Omega^0) & \xrightarrow{\delta} & \dots \\
 & \uparrow & & & & & & & & & \\
 & 0 & & & & & & & & & 
 \end{array}$$

On conclut donc avec la proposition 4.18. ■

Nous allons maintenant voir comment le bicomplexe de Čech-de Rham permet de relier la cohomologie de de Rham d'une variété et la cohomologie de Čech à valeurs dans le préfaisceau constant  $\mathbb{R}$ .

Un élément de  $C^p(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \prod_{\sigma \in S_p(\mathcal{U})} \mathbb{R}$  peut être vu comme une collection de nombres réels ;

ou encore comme une collection de fonctions constantes  $r_\sigma : U_{|\sigma|} \rightarrow \mathbb{R}$ . Cette deuxième façon de voir permet de montrer que  $C^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  est un sous-complexe de  $C^*(\mathcal{U}, \Omega^0)$ . On peut donc augmenter le bicomplexe de Čech-de Rham par la ligne  $C^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & \\
 & C^0(\mathcal{U}, \Omega^2) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathcal{U}, \Omega^2) & \xrightarrow{\delta} & C^2(\mathcal{U}, \Omega^2) & \xrightarrow{\delta} \dots \\
 & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & \\
 & C^0(\mathcal{U}, \Omega^1) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathcal{U}, \Omega^1) & \xrightarrow{\delta} & C^2(\mathcal{U}, \Omega^1) & \xrightarrow{\delta} \dots \\
 & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & \\
 & C^0(\mathcal{U}, \Omega^0) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathcal{U}, \Omega^0) & \xrightarrow{\delta} & C^2(\mathcal{U}, \Omega^0) & \xrightarrow{\delta} \dots \\
 & \uparrow i & & \uparrow i & & \uparrow i & \\
 0 & \longrightarrow & C^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} & C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} \dots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & 
 \end{array}$$

**Théorème 4.24 : de de Rham**

Si  $\mathcal{U}$  est un recouvrement simple alors  $i : C^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow \Sigma(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*))$  est un quasi-isomorphisme, ie  $i^* : H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} H_D^*(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*))$ .  
 En particulier, d'après 4.23,  $H_{DR}^*(M) \simeq H_D^*(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)) \simeq H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ .

Démonstration :

Remarquons que pour tout  $\sigma \in S_p(\mathcal{U})$ ,  $U_{|\sigma|}$  est contractile, ainsi la suite suivante est exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \Omega^0(U_{|\sigma|}) \xrightarrow{d} \Omega^1(U_{|\sigma|}) \xrightarrow{d} \Omega^2(U_{|\sigma|}) \rightarrow \dots$$

On en déduit donc que les colonnes du bicomplexe de Čech-de Rham augmenté par la ligne  $C^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  sont exactes et on conclut à l'aide de 4.18. ■

Remarque 4.25 : le résultat précédent est très fort puisqu'il permet de lier la cohomologie de Čech qui fait intervenir la combinatoire des recouvrements à la cohomologie de de Rham qui est basée sur des propriétés algébriques des formes différentielles. Ce résultat nous permettra de calculer la cohomologie de Čech d'une variété différentielle sans avoir à passer par une limite inductive, voir 4.50. De plus nous pouvons démontrer que les isomorphismes entre ces trois cohomologies sont en fait des isomorphismes d'algèbres graduées (voir la section 4.7) pour deux certaines structures sur la cohomologie de Čech-de Rham et la cohomologie de Čech. Quelques corollaires immédiats et exemples mettent en avant la puissance de la proposition précédente :

**Corollaire 4.26**

La cohomologie de Čech  $H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  est la même pour tout recouvrement simple  $\mathcal{U}$  de  $M$ .

Si  $M$  est de type fini alors la cohomologie de Čech  $H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  est clairement de dimension finie et donc :

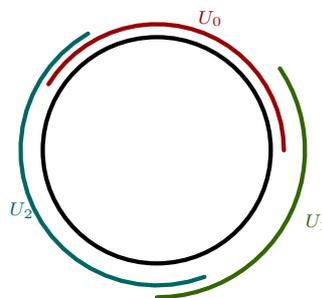
**Corollaire 4.27**

Si  $M$  est de type fini alors la cohomologie de de Rham  $H_{DR}^*(M)$  est de dimension finie.

Ce résultat est donc en particulier vrai pour une variété différentielle compacte.

Exemple 4.28 : cohomologie du cercle  $\mathbb{S}^1$

Considérons le bon recouvrement du cercle  $\mathbb{S}^1$  donné par trois ouverts  $U_0, U_1$  et  $U_2$  comme sur le schéma ci-dessous.



Le complexe de Čech (à cochaînes ordonnées) relativement à ce bon recouvrement à valeurs dans  $\mathbb{R}$  s'écrit

$$0 \rightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow 0$$

où  $C^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \{(\omega_0, \omega_1, \omega_2), \omega_\alpha \text{ constant sur } U_\alpha\}$  et  $C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \{(\eta_{(0,1)}, \eta_{(0,2)}, \eta_{(1,2)}), \eta_{(\alpha,\beta)} \text{ constant sur } U_{\alpha\beta}\}$  et l'opérateur de cobord est donné par  $(\delta\omega)_{(\alpha,\beta)} = \omega_\beta - \omega_\alpha$ .

Ainsi  $\ker \delta = \{(\omega_0, \omega_1, \omega_2), \omega_0 = \omega_1 = \omega_2\} = \mathbb{R}$  et  $H^0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$  et  $H^1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}^3 / \text{im } \delta = \mathbb{R}^3 / \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}$ .

Nous pouvons même trouver un générateur de  $H^1(\mathbb{S}^1)$  : un 1-cocycle  $\eta$  est un cobord si et seulement si  $\eta_{(0,1)} - \eta_{(0,2)} + \eta_{(1,2)} = 0$ , ainsi un générateur de  $H^1(\mathbb{S}^1)$  est la classe de  $\eta = (1, 0, 0)$ .

Remarque : matriciellement  $\delta = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . ■

Exemple 4.29 : cohomologie de la sphère  $\mathbb{S}^2$

Considérons le bon recouvrement de  $\mathbb{S}^2$  formé de trois ouverts sur l'hémisphère sud (débordant sur le nord, chacun passant par le pôle sud, et s'intersectant deux à deux) comme sur la figure ci-dessous ainsi que de l'hémisphère nord. Le nerf de ce recouvrement est la surface d'un tétraèdre.



Le complexe de Čech (à cochaînes ordonnées) relativement à ce bon recouvrement à valeurs dans  $\mathbb{R}$  s'écrit

$$0 \rightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow 0$$

où  $C^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ ,  $C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  et  $C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ . Nous avons  $\ker \delta^0 = \mathbb{R}$  et donc  $H^0(\mathbb{S}^2) = \mathbb{R}$ . Puis comme  $\ker \delta^0 = \mathbb{R}$ ,  $\text{im } \delta^0 = \mathbb{R}^3$  (par le rang). Puis si  $\eta \in \ker \delta^1$  alors  $\eta$  est complètement déterminé par  $\eta_{(0,1)}$ ,  $\eta_{(0,2)}$  et  $\eta_{(0,3)}$  ainsi  $\ker \delta^1 = \mathbb{R}^3$  et  $H^1(\mathbb{S}^2) = 0$ . Enfin puisque  $\text{im } \delta^1 = C^1 / \ker \delta^1 = \mathbb{R}^3$ , nous avons  $H^2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{R}^4 / \text{im } \delta^1 = \mathbb{R}$ .

Remarque :  $\delta^0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\delta^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . ■

Pour dessiner le nerf d'un recouvrement, à chaque ouvert on associe un sommet, à chaque intersection non vide de deux ouverts on dessine le segment joignant les deux sommets et à chaque intersection non vide de trois ouverts on remplit la face du triangle formé par les trois sommets.

## 4.4 Explicitation des isomorphismes

Nous allons améliorer le résultat 4.23 : les complexes de Čech-de Rham  $C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)$  et de de Rham  $\Omega^*(M)$  ne sont pas seulement quasi-isomorphes, ils sont en fait homotopes. Nous allons donc construire l'inverse de  $r$  à homotopie près. Cette application nous permettra d'expliciter un isomorphisme entre la cohomologie de de Rham et la cohomologie de Čech relativement à un recouvrement simple et à valeurs dans le préfaisceau constant  $\mathbb{R}$  (amélioration du dernier point du résultat 4.24).

Dans toute cette partie, on considère  $M$  une variété différentielle,  $\mathcal{U}$  un recouvrement ouvert de  $M$ , le morphisme de complexes de cochaînes  $r : \Omega^*(M) \rightarrow \Sigma(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*))$  ainsi que l'opérateur d'homotopie  $K : C^*(\mathcal{U}, \Omega^q) \rightarrow C^{*-1}(\mathcal{U}, \Omega^q)$  de 4.22.

Posons  $d_\varepsilon = (-1)^p d$  sur  $C^p(\mathcal{U}, \Omega^q)$ , de sorte à ce que  $D = \delta + d_\varepsilon$  et  $\mathcal{K} = -d_\varepsilon K = (-1)^{p+1} dK : C^p(\mathcal{U}, \Omega^q) \rightarrow C^{p-1}(\mathcal{U}, \Omega^{q+1})$ .

La formule suivante est donnée dans [1] (prop 9.5), elle découle d'une étude détaillée de la preuve 4.23 (voir 4.18).

Soit  $\omega \in \Sigma^n(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*))$  alors  $\omega = \sum_{i=0}^n \omega_i \in \bigoplus_{i=0}^n C^i(\mathcal{U}, \Omega^{n-i})$  et  $D\omega = \sum_{i=0}^{n+1} \eta_i \in \bigoplus_{i=0}^{n+1} C^i(\mathcal{U}, \Omega^{n+1-i})$

où  $\eta_0 = d\omega_0 = d_\varepsilon \omega_0$ ,  $\eta_i = \delta \omega_{i-1} + d_\varepsilon \omega_i = \delta \omega_{i-1} + (-1)^i d\omega_i$  si  $0 < i < n + 1$ ,  $\eta_{n+1} = \delta \omega_n$ .

Nous fixons ces notations pour la suite.

**Proposition 4.30 : formule de recollement**

Soit  $f : \Sigma(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)) \rightarrow \Omega^*(M)$  le morphisme de complexes défini par

$$f(\omega) = \sum_{i=0}^n \mathcal{K}^i \omega_i - \sum_{i=1}^{n+1} K \mathcal{K}^{i-1} \eta_i$$

alors

- (i)  $f \circ r = id$ .
- (ii)  $r \circ f$  est homotope à l'identité.

Remarque 4.31 :  $f(\omega) \in C^0(\mathcal{U}, \Omega^n)$ .

**Lemme 4.32**

Pour  $i \geq 1$ ,  $\delta \mathcal{K}^i = \mathcal{K}^i \delta + \mathcal{K}^{i-1} d_\varepsilon$ .

Démonstration :

Comme  $d_\varepsilon$  et  $\delta$  sont anticommutatifs,  $\delta K + K \delta = id$  (4.22) et que  $d_\varepsilon \mathcal{K} = 0$  :  
 $\delta \mathcal{K}^i = \delta(-d_\varepsilon K) \mathcal{K}^{i-1} = d_\varepsilon \delta K \mathcal{K}^{i-1} = d_\varepsilon (id - K \delta) \mathcal{K}^{i-1} = -d_\varepsilon K \delta \mathcal{K}^{i-1} = \mathcal{K} \delta \mathcal{K}^{i-1}$ .  
 En répétant ce procédé, on obtient  $\delta \mathcal{K}^i = \mathcal{K}^{i-1} \delta \mathcal{K}$ .  
 Ensuite  $\delta \mathcal{K}^i = \mathcal{K}^{i-1} \delta(-d_\varepsilon K) = \mathcal{K}^{i-1} d_\varepsilon \delta K = \mathcal{K}^{i-1} d_\varepsilon (id - K \delta) = \mathcal{K}^{i-1} d_\varepsilon + \mathcal{K}^i \delta$ . ■

Démonstration de 4.30 :

- Montrons que  $f(\omega) \in \Omega^*(M)$  :

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \sum_{i=0}^n \mathcal{K}^i \omega_i - \sum_{i=1}^{n+1} K \mathcal{K}^{i-1} \eta_i \\ &= \sum_{i=0}^n \mathcal{K}^i \omega_i - \sum_{i=1}^{n+1} K \mathcal{K}^{i-1} \delta \omega_{i-1} - \sum_{i=1}^n K \mathcal{K}^{i-1} d_\varepsilon \omega_i \\ &= \sum_{i=0}^n \mathcal{K}^i \omega_i - \sum_{i=1}^{n+1} K \mathcal{K}^{i-1} \delta \omega_{i-1} - \sum_{i=1}^n K (\delta \mathcal{K}^i - \mathcal{K}^i \delta) \omega_i \text{ d'après le lemme} \\ &= \underbrace{\sum_{i=0}^n \mathcal{K}^i \omega_i - \sum_{i=1}^n K \delta \mathcal{K}^i \omega_i}_{\omega_0 + \sum_{i=1}^n (id - K \delta) \mathcal{K}^i \omega_i} + \underbrace{\sum_{i=1}^n K \mathcal{K}^i \delta \omega_i - \sum_{i=1}^{n+1} K \mathcal{K}^{i-1} \delta \omega_{i-1}}_{-K \delta \omega_0} \\ &= \sum_{i=0}^n (id - K \delta) \mathcal{K}^i \omega_i \\ &= \sum_{i=0}^n \delta K \mathcal{K}^i \omega_i \text{ puisque } \delta K + K \delta = id \text{ (4.22)} \end{aligned}$$

Nous savons que  $f(\omega) \in C^0(\mathcal{U}, \Omega^n)$  et, d'après le calcul précédent, que  $\delta f(\omega) = 0$ , donc par 4.23, il existe une unique forme différentielle  $\tilde{\omega} \in \Omega^*(M)$ ,  $f(\omega) = r(\tilde{\omega})$ . Par injectivité de  $r$ , on peut identifier  $f(\omega)$  et  $\tilde{\omega}$  et  $f(\omega) \in \Omega^*(M)$ .

La forme  $\tilde{\omega}$  s'obtient facilement : on a  $f(\omega)_\alpha = f(\omega)_\beta$  sur  $U_{\alpha\beta}$ , il suffit d'utiliser une partition de l'unité subordonnée à  $\mathcal{U}$ .

- Montrons que  $f$  est un morphisme de cochaînes :

$$\left. \begin{aligned} f(D\omega) &= f(\eta) = \sum_{i=0}^{n+1} \mathcal{K}^i \eta_i \\ df(\omega) &= d\omega_0 - d \sum_{i=1}^{n+1} K \mathcal{K}^{i-1} \eta_i = \eta_0 + \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{K}^i \eta_i = \sum_{i=0}^{n+1} \mathcal{K}^i \eta_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \circ D = d \circ f.$$

•  $f \circ r = id : r(\omega) = \omega_0 \in C^0(\mathcal{U}, \Omega^q)$  et alors  $f \circ r(\omega) = f(\omega_0) = \omega_0$ . On conclut avec la fin du premier point de la preuve.

•  $r \circ f$  est homotope à l'identité : considérons  $L : \Sigma(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)) \rightarrow \Sigma(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*))$  l'opérateur d'homotopie donné par  $L\omega = \sum_{p=0}^{n-1} (L\omega)_p$  où  $(L\omega)_p = \sum_{i=p+1}^n K\mathcal{K}^{i-(p+1)}\omega_i \in C^p(\mathcal{U}, \Omega^{n-1-p})$ .

On doit montrer que  $id - r \circ f = DL + LD$ .

D'après le premier point, si  $\omega_i \in C^i(\mathcal{U}, \Omega^{n-i})$ ,  $f(\omega_i) = \delta K\mathcal{K}^i\omega_i$ .

$$\text{Puis, } DL\omega_i = \sum_{p=0}^{i-1} \delta K\mathcal{K}^{i-(p+1)}\omega_i + \sum_{p=0}^{i-1} d_\varepsilon K\mathcal{K}^{i-(p+1)}\omega_i = \sum_{p=0}^{i-1} \delta K\mathcal{K}^{i-(p+1)}\omega_i - \sum_{p=0}^{i-1} \mathcal{K}^{i-p}\omega_i = \sum_{p=0}^{i-1} (\delta K - \mathcal{K})\mathcal{K}^{i-(p+1)}\omega_i.$$

$$\text{Ensuite } LD\omega_i = L\delta\omega_i + Ld_\varepsilon\omega_i = \sum_{p=0}^i K\mathcal{K}^{i-p}\delta\omega_i + \sum_{p=0}^{i-1} K\mathcal{K}^{i-(p+1)}d_\varepsilon\omega_i = \sum_{p=0}^i K\mathcal{K}^{i-p}\delta\omega_i +$$

$$\sum_{p=0}^{i-1} K[\delta\mathcal{K}^{i-p} - \mathcal{K}^{i-p}\delta]\omega_i = K\delta\omega_i + \sum_{p=0}^{i-1} K\delta\mathcal{K}^{i-p}\omega_i = \sum_{p=0}^i K\delta\mathcal{K}^{i-p}\omega_i \text{ (d'après le lemme).}$$

Finalement, comme  $K\delta + \delta K = id \Rightarrow K\delta\mathcal{K} + \delta K\mathcal{K} = \mathcal{K}$  :

$$DL\omega_i + LD\omega_i = \sum_{p=0}^{i-1} (\delta K - \mathcal{K} + K\delta\mathcal{K})\mathcal{K}^{i-(p+1)}\omega_i + K\delta\omega_i = \sum_{p=0}^{i-1} (\delta K - \delta K\mathcal{K})\mathcal{K}^{i-(p+1)}\omega_i + K\delta\omega_i =$$

$$\delta K\omega_i - \delta K\mathcal{K}^i\omega_i + K\delta\omega_i = \omega_i - f(\omega_i) \text{ puisque } K\delta + \delta K = id. \quad \blacksquare$$

Nous en déduisons cette amélioration du dernier point de 4.24 (explicitation de l'isomorphisme entre de Rham et Čech) :

Corollaire 4.33 : isomorphisme explicite entre les cohomologies de de Rham et de Čech

Si  $\eta \in C^n(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  est un  $n$ -cocycle de Čech alors la forme différentielle sur  $M$  fermée correspondante est donnée par  $f(\eta) = \mathcal{K}^n\eta$ .

Exemple 4.34 : suite de 4.28

Nous allons obtenir un générateur de  $H_{DR}^1(\mathbb{S}^1)$  à partir d'un générateur de  $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ .

Nous avons vu en 4.28 qu'un 1-cocycle non trivial sur  $\mathbb{S}^1$  pour la cohomologie de Čech est  $\eta = (\eta_{01}, \eta_{02}, \eta_{12}) = (1, 0, 0)$ .

Si  $\{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$  est une partition de l'unité subordonnée au bon recouvrement de l'exemple 4.28 alors  $K\eta = (-\rho_1, \rho_0, 0)$ .

Le générateur  $\mathcal{K}\eta$  de  $H_{DR}^1(\mathbb{S}^1)$  est donc représenté par  $-d(-\rho_1)$  qui est une application plateau sur  $U_0 \cap U_1$  d'intégrale 1.  $\blacksquare$

## 4.5 Le théorème de Künneth revu par Čech

Nous proposons une nouvelle preuve du théorème de Künneth, tirant partie des liens entre la cohomologie de de Rham et la cohomologie de Čech.

Théorème 4.35 : théorème de Künneth

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles telles que  $\dim H_{DR}^*(M) < \infty$  ou  $\dim H_{DR}^*(N) < \infty$ .

Alors  $H_{DR}^*(M \times N) \simeq H_{DR}^*(M) \otimes H_{DR}^*(N)$ .

Démonstration :

| Supposons que  $\dim H^*(N) < \infty$ .

Soit  $\mathcal{U} = (U_\alpha)$  un recouvrement simple de  $M$  et considérons les projections

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{p} & N \\ \pi \downarrow & & \\ M & & \end{array}$$

alors  $\pi^{-1}(\mathcal{U}) = \{\pi^{-1}(U_\alpha)\}$  est un recouvrement de  $M \times N$  (qui n'est pas forcément un recouvrement simple).

Il existe une application naturelle  $\pi^* : C^*(\mathcal{U}, \Omega^*) \rightarrow C^*(\pi^{-1}(\mathcal{U}), \Omega^*)$  agissant comme l'image réciproque sur chaque ouvert.

Soit  $\{[\omega_\alpha]\}$  une base de  $H_{DR}^*(N)$ . On définit un morphisme de bicomplexes  $\pi_{\mathcal{U}}^* : H^*(N) \otimes C^*(\mathcal{U}, \Omega^*) \rightarrow C^*(\pi^{-1}(\mathcal{U}), \Omega^*)$  par  $\pi_{\mathcal{U}}^*([\omega_\alpha] \otimes \varphi) = p^*\omega_\alpha \wedge \pi^*\varphi$ .

Comme  $H_{DR}^*(N)$  est un espace vectoriel,  $H_{DR}^*(N) \otimes C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)$  consiste en plusieurs copies de  $C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)$  et l'opérateur différentiel  $D$  de  $\Sigma(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*))$  induit un opérateur sur  $H_{DR}^*(N) \otimes C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)$  dont la cohomologie est  $H_{DR}^*(N) \otimes H_D^*(\Sigma(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*))) = H_{DR}^*(N) \otimes H_{DR}^*(M)$ .

Comme la  $D$ -cohomologie de  $\Sigma(C^*(\pi^{-1}(\mathcal{U}), \Omega^*))$  est  $H_{DR}^*(M \times N)$ , si nous montrons que  $\pi_{\mathcal{U}}^*$  est un quasi-isomorphisme pour la  $D$ -cohomologie, le théorème est démontré.

Nous allons montrer que  $\pi_{\mathcal{U}}^*$  est un quasi-isomorphisme pour la  $d$ -cohomologie :

La colonne  $C^p(\pi^{-1}(\mathcal{U}), \Omega^*)$  est l'ensemble des formes différentielles sur les  $\bigsqcup_{\sigma \in S_p(\mathcal{U})} \pi^{-1}(U_{|\sigma|})$

et la colonne  $C^p(\mathcal{U}, \Omega^*)$  est l'ensemble des formes différentielles sur les  $\bigsqcup_{\sigma \in S_p(\mathcal{U})} U_{|\sigma|}$ . On a

donc l'isomorphisme des  $d$ -cohomologies  $\prod H^*(\pi^{-1}(U_{|\sigma|})) \simeq H^*(F) \otimes \prod H^*(U_{|\sigma|})$  où l'isomorphisme est donné par le produit extérieur des images réciproques. Ainsi  $\pi_{\mathcal{U}}^*$  induit un isomorphisme entre les  $d$ -cohomologies de  $C^*(\pi^{-1}(\mathcal{U}), \Omega^*)$  et  $H^*(F) \otimes C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)$ .

On conclut avec 4.19. ■

## 4.6

# Cohomologie de Čech

### 4.6.1

## Limite inductive

**Définition 4.36** : ensemble préordonné filtrant

Un *ensemble préordonné filtrant*  $(I, \leq)$  est un ensemble préordonné tel que  $\forall (i, j) \in I^2, \exists k \in I, i, j \leq k$ .

**Définition 4.37** : partie cofinale

Une partie  $J \subset I$  d'un ensemble préordonné filtrant est dite *cofinale* si  $\forall x \in I, \exists y \in J, x \leq y$ .

**Remarque 4.38** : une partie cofinale est encore filtrante.

**Exemple 4.39** :

Soit  $M$  une variété différentielle, l'ensemble des recouvrements ouverts de  $M$  est filtrant pour le préordre de raffinement.

L'ensemble des recouvrements simples est une partie cofinale de l'ensemble des recouvrements ouverts de  $M$  d'après 3.61. ■

On rappelle qu'un préordre est une relation binaire réflexive et transitive.

**Définition 4.40 : système inductif**

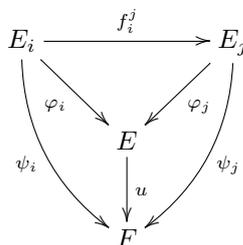
Soient  $(I, \leq)$  un ensemble préordonné filtrant et soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. On appelle *système inductif d'objets de  $\mathcal{C}$  indexés par  $I$*  la donnée d'une famille  $(E_i)_{i \in I}$  d'objets de  $\mathcal{C}$  et de morphismes  $f_i^j : E_i \rightarrow E_j$  pour tout couple  $(i, j) \in I^2$  avec  $i \leq j$  tels que :

- (i)  $\forall i \in I, f_i^i = id_{E_i}$ .
- (ii)  $\forall (i, j, k) \in I^3, i \leq j \leq k \Rightarrow f_j^k \circ f_i^j = f_i^k$ .

**Définition 4.41 : limite inductive**

Soit  $(E_i, f_i^j)$  un système inductif dans une catégorie  $\mathcal{C}$ . La limite inductive d'un système inductif, si elle existe, est la donnée d'un objet  $E$  de  $\mathcal{C}$  et de morphismes  $\varphi_i : E_i \rightarrow E$  tels que  $\forall i \leq j, \varphi_i = \varphi_j \circ f_i^j$ .

Le couple  $(E, \varphi_i)$  doit être universel au sens suivant : pour tout autre couple  $(F, \psi_i)$  convenant, il existe un unique morphisme  $u : E \rightarrow F$  tel que le diagramme suivant commute



On note souvent  $E = \varinjlim E_i$ .  
 La limite inductive est unique à isomorphisme unique près.

**Remarques 4.42 :**

- Il existe une définition encore plus générale.
- Si  $I$  admet un plus grand élément  $\omega$  alors la limite inductive de tout système inductif est  $E_\omega$ .

La limite inductive existe toujours pour les structures algébriques usuelles (magmas, monoïdes, groupes, anneaux, modules sur un anneau fixé, algèbres sur un corps fixé...) et pour les espaces topologiques. Nous allons montrer quelques constructions en commençant par celle des ensembles, qui est à la base des constructions pour les catégories citées.

**Construction de la limite inductive d'ensembles 4.43**

Considérons un système inductif  $(E_i, f_i^j)$  dans  $\mathcal{E}ns$ .

Posons  $E_\infty = \bigsqcup_{i \in I} E_i / \sim$  où  $(i, x) \sim (j, y) \Leftrightarrow \exists k, i, j \leq k, f_i^k(x) = f_j^k(y)$   
 ainsi que  $\varphi_i : E_i \rightarrow E_\infty$   
 $x \mapsto [(i, x)]$ .

Alors  $\varphi_j \circ f_i^j(x) = [(j, f_i^j(x))] \sim [(i, f_i^j(x))] = [(i, x)] = \varphi_i(x)$ .

Il reste à vérifier la propriété universelle : soit  $(F, \psi_i)$  un autre couple convenant et soit  $\tilde{x} \in E$ . Considérons  $(i, x)$  un représentant de  $\tilde{x}$  et posons  $u(\tilde{x}) = \psi_i(x)$ . On vérifie facilement que  $u(x)$  ne dépend pas du choix du représentant : si  $(j, y)$  est un autre représentant,  $\psi_j(y) = \psi_i \circ f_j^i(y) = \psi_i(x)$ . Par construction,  $u$  est unique. ■

**Les espaces topologiques 4.44**

Dans  $\mathcal{T}op$ , on munit  $E_\infty$  de la topologie la plus fine rendant les applications  $\varphi_i : E_i \rightarrow E_\infty$  continues : une partie  $U$  de  $E_\infty$  est un ouvert si et seulement si pour tout  $i, \sigma_i^{-1}(U)$  est un ouvert de  $E_i$ . ■

Le cas des lois de composition 4.45

Soit  $(E_i, f_i^j)$  un système inductif de magmas  $(E_i, *_i)$  où les  $f_i^j$  sont des morphismes. Il existe une seule loi de composition interne  $*$  sur  $E_\infty$  telle que les applications  $\varphi : E_i \rightarrow E_\infty$  soient des morphismes.

Soient  $[(i, x)], [(j, y)] \in E_\infty$  alors comme  $I$  est filtrant, il existe  $k \in I, i, j \leq k$  et donc  $[(i, x)] = [(k, f_i^k(x))]$  et  $[(j, y)] = [(k, f_j^k(y))]$ . On pose  $[(i, x)] * [(j, y)] = [(k, f_i^k(x) *_k f_j^k(y))]$ . On vérifie facilement que  $[(i, x)] * [(j, y)]$  ne dépend pas du choix de  $k$ .

On vérifie facilement les propriétés suivantes :

- Si tous les  $*_i$  sont commutatifs alors  $*$  l'est aussi.
- Si tous les  $*_i$  sont associatifs alors  $*$  l'est aussi.
- Si tous les  $*_i$  admettent un neutre  $e_i$  et si  $f_i^j(e_i) = e_j$  alors  $*$  possède un neutre  $e$  (et  $\varphi_i(e_i) = e$ ).
- En particulier si les  $E_i$  sont des groupes alors  $E_\infty$  est un groupe.

Supposons maintenant que chaque  $E_i$  soit muni de deux lois de composition internes  $+_i$  et  $*_i$  alors  $E_\infty$  est muni de  $+$  et de  $*$ .

On vérifie que si chaque  $*_i$  est distributive par rapport à  $+_i$  alors  $*$  est distributive par rapport à  $+$ . Ainsi chaque  $E_i$  est un anneau, il en est de même pour  $E_\infty$ . Nous avons les propriétés suivantes :

- Si chaque anneau  $E_i$  est intègre, il en est de même pour  $E_\infty$ .
- Si chaque anneau  $E_i$  est un corps, il en est de même pour  $E_\infty$ .

■

**Proposition 4.46**

Si  $(E_i, f_i^j)_{i,j \in I}$  est un système inductif pour l'ensemble filtrant  $I$  et si  $J$  est une partie cofinale de  $I$  alors la restriction à  $J$  est encore un système inductif.

De plus  $(E_i, f_i^j)_I$  admet une limite inductive si et seulement si  $(E_i, f_i^j)_J$  admet une limite inductive et alors  $\varinjlim_I E_i = \varinjlim_J E_i$ .

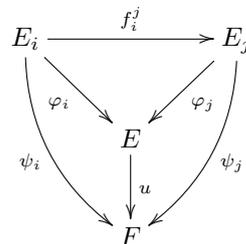
Démonstration :

- Si  $(E_i, f_i^j)_I$  admet une limite inductive, il est évident qu'elle convient pour  $(E_i, f_i^j)_J$ .
- Supposons maintenant que  $(E_i, f_i^j)_J$  admette une limite inductive  $(E, \varphi_i)_J$ .

Soit  $i \in I$ , il existe  $j \in J, i \leq j$ , posons alors  $\varphi_i = \varphi_j \circ f_i^j : E_i \rightarrow E$ . On vérifie que  $\varphi_i$  ne dépend pas du choix de  $j : \varphi_{j'} \circ f_i^{j'} = \varphi_{j'} \circ f_{j'}^{j'} \circ f_i^j = \varphi_j \circ f_i^j$ .

Soient maintenant  $i, i' \in I$  alors il existe  $j \in J, i, i' \leq j$  et  $\varphi_{i'} \circ f_i^{i'} = \varphi_k \circ f_i^k \circ f_i^{i'} = \varphi_k \circ f_i^k = \varphi_i$ .

Il nous reste à vérifier la propriété universelle. Si  $(F, \psi_i)_I$  est une autre limite universelle pour  $I$  alors  $(F, \psi_i)_J$  l'est pour  $J$  par le premier point et il existe  $u : E \rightarrow F$  faisant commuter le diagramme suivant pour  $i, j \in J$



Par construction, le diagramme commute aussi pour  $i, j \in I$ .

■

## 4.6.2 Cohomologie de Čech

Soit  $\mathcal{F}$  un préfaisceau d'anneaux (de groupes). Considérons  $\mathcal{V} = (V_\beta)_{\beta \in J}$  un raffinement de  $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ , cela revient à dire qu'il existe  $\varphi : J \rightarrow I$  vérifiant  $V_\beta \subset U_{\varphi(\beta)}$  (3.60).

Ce raffinement  $\varphi$  induit une application  $\varphi^\# : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$  de la façon suivante :

$$(\varphi^\# \omega)_\sigma = \omega_{\varphi \circ \sigma}$$

(remarque : si  $A \in N(\mathcal{V})$  alors  $\varphi(A) \in N(\mathcal{U})$  et donc pour tout  $\sigma \in S_q(\mathcal{V})$  on a  $\varphi \circ \sigma \in S_q(\mathcal{U})$ ).

**Proposition 4.47**

L'application  $\varphi^\#$  est un morphisme de complexes de cochaînes.

Démonstration :

Soit  $\omega \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  et  $\sigma \in S_{q+1}(\mathcal{V})$ , alors :  $(\delta(\varphi^\#\omega))_\sigma = (\delta\omega)_{\varphi \circ \sigma} = (\varphi^\#(\delta\omega))_\sigma$ . ■

**Proposition 4.48**

Soient  $\mathcal{U} = (U_\alpha)_I$  et  $\mathcal{V} = (V_\beta)_J$  deux recouvrements ouverts.  
Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux raffinements  $J \rightarrow I$  alors  $\varphi^\#$  et  $\psi^\#$  sont homotopes.

Démonstration :

Considérons  $K : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{q-1}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$  donné par

$$(K\omega)_\sigma = \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i \omega_{(\varphi(\sigma_0), \dots, \varphi(\sigma_i), \psi(\sigma_i), \dots, \psi(\sigma_{q-1}))} \text{ où } \omega \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \text{ et } \sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_{q-1}) \in S_{q-1}(\mathcal{V}).$$

On a alors  $\psi^\# - \varphi^\# = \delta K + K\delta$ . ■

D'après les deux propositions précédentes, si  $\mathcal{U} < \mathcal{V}$  alors l'application de cohomologie  $H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^*(\mathcal{V}, \mathcal{F})$  est bien définie. Nous avons donc un système inductif de groupes  $\{H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})\}_{\mathcal{U}}$ .

**Définition 4.49 : cohomologie de Čech**

Soit  $X$  un espace topologique et  $\mathcal{F}$  un préfaisceau de groupes alors la cohomologie de Čech de  $X$  à coefficients dans  $\mathcal{F}$  est la limite inductive  $H^*(X, \mathcal{F}) = \varinjlim H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ .

**Théorème 4.50 : de de Rham**

Soit  $\mathbb{R}$  le préfaisceau constant sur une variété différentielle  $M$ , alors  $H^*(M, \mathbb{R}) \simeq H_{DR}^*(M)$ .

Démonstration :

Nous avons vu dans l'exemple 4.39 que l'ensemble des recouvrements simples était une partie cofinale de l'ensemble des recouvrements ouverts pour le préordre de raffinement, ainsi d'après la proposition 4.46 on peut se restreindre à la limite inductive sur l'ensemble des recouvrements simples.

Or nous avons vu en 4.24 et 4.33 que si  $\mathcal{U}$  était un recouvrement simple alors  $H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \simeq H_{DR}^*(M)$ .

Nous allons montrer que cet isomorphisme est compatible avec les raffinements, ce qui permettra de conclure.

Nous savons que cet isomorphisme découle du quasi-isomorphisme  $f \circ i : C^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow \Sigma(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)) \rightarrow \Omega^*(M)$ .

Soit  $\mathcal{V}$  un raffinement de  $\mathcal{U}$  donné par  $\varphi : J \rightarrow I$  alors le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
 C^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\varphi^\#} & C^*(\mathcal{V}, \mathbb{R}) \\
 \downarrow i & & \downarrow i \\
 \Sigma(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)) & \xrightarrow{\varphi^\#} & \Sigma(C^*(\mathcal{V}, \Omega^*)) \\
 \searrow f & & \swarrow f \\
 & \Omega^*(M) &
 \end{array}$$

Comme les applications  $f$  sont des quasi-isomorphismes, on en déduit que l'application  $\varphi^\#$  du bas est aussi un quasi-isomorphisme et puis comme les applications  $i$  sont des quasi-isomorphismes, on en déduit que l'application  $\varphi^\#$  du dessus est aussi un quasi-isomorphisme. Ainsi  $\varphi^\# : H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow H^*(\mathcal{V}, \mathbb{R})$  est un isomorphisme dès que  $\mathcal{U} < \mathcal{V}$  d'où la compatibilité demandée :  $\Omega^*(M)$  vérifie la définition de la limite inductive. ■

Remarque 4.51 : plus généralement :  $H^*(M, \mathbb{R}^n) \simeq \underbrace{H^*(M, \mathbb{R}) \oplus \dots \oplus H^*(M, \mathbb{R})}_{n \text{ fois}} \simeq H^*(M, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n \simeq H_{DR}^*(M) \otimes \mathbb{R}^n.$$

## 4.7 Structures d'anneaux

Nous savons déjà que le produit extérieur de  $\Omega^*(M)$  induit une structure d'algèbre graduée anticommutative sur  $H_{DR}^*(M)$  (cf 3.19).

Nous allons maintenant munir le complexe de Čech-de Rham d'une structure d'algèbre graduée anticommutative.

$$C^p(\mathcal{U}, \Omega^q) \times C^{p'}(\mathcal{U}, \Omega^{q'}) \longrightarrow C^{p+p'}(\mathcal{U}, \Omega^{q+q'})$$

Considérons le produit  $(\omega, \omega') \longmapsto \omega * \omega'$  où  $(\omega * \omega')_{(\sigma_0, \dots, \sigma_{p+p'})} =$

$$\omega_{(\sigma_0, \dots, \sigma_p)|U_{|\sigma|}} \wedge \omega'_{(\sigma_{p+1}, \dots, \sigma_{p+p'})|U_{|\sigma|}}.$$

Nous avons après calculs :

- $\delta(\omega * \omega') = (\delta\omega) * \omega' + (-1)^p \omega * (\delta\omega')$
- $d(\omega * \omega') = (d\omega) * \omega' + (-1)^q \omega * (d\omega')$

On modifie le produit  $*$  en un *cup produit*  $\smile : C^p(\mathcal{U}, \Omega^q) \times C^{p'}(\mathcal{U}, \Omega^{q'}) \rightarrow C^{p+p'}(\mathcal{U}, \Omega^{q+q'})$  où  $\omega \smile \omega' = (-1)^{\nu(p, p', q, q')} \omega * \omega'$  de sorte à ce que  $D$  soit une antidérivation pour  $\smile$ .

En développant chaque côté de l'égalité  $D(\omega \smile \omega') = (D\omega) \smile \omega' + (-1)^{p+q} \omega \smile (D\omega')$  on obtient les conditions :

$$\begin{cases}
 (-1)^{\nu(p, p', q, q')} = (-1)^{\nu(p+1, p', q, q')} \\
 (-1)^{p+\nu(p, p', q, q')} = (-1)^{p+q+\nu(p, p'+1, q, q')} \\
 (-1)^{p+\nu(p, p', q, q')} = (-1)^{p+\nu(p, p', q+1, q')} \\
 (-1)^{p+q+\nu(p, p', q, q')} = (-1)^{p+q+p'+\nu(p, p', q', q'+1)}
 \end{cases}
 \Leftrightarrow
 \begin{cases}
 (-1)^{\nu(p, p', q, q')} = (-1)^{\nu(p+1, p', q, q')} \\
 (-1)^{\nu(p, p', q, q')} = (-1)^{q+\nu(p, p'+1, q, q')} \\
 (-1)^{\nu(p, p', q, q')} = (-1)^{\nu(p, p', q+1, q')} \\
 (-1)^{\nu(p, p', q, q')} = (-1)^{p'+\nu(p, p', q', q'+1)}
 \end{cases}$$

On en déduit que  $\nu(p, p', q, q') = qp'$  est un bon candidat et réciproquement, on vérifie qu'il convient.

Ainsi  $\Sigma(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*))$  est une algèbre graduée associative et anticommutative pour  $\smile$  et  $D$  est une antidérivation pour  $\smile$ .

Ensuite l'inclusion du complexe de Čech  $C^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  dans le complexe de Čech-de Rham  $\Sigma(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*))$  induit une structure produit sur  $C^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  : si  $\omega \in C^p(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  et si  $\eta \in C^q(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  alors  $(\omega \smile \eta)_{(\sigma_0, \dots, \sigma_{p+q})} = \omega_{(\sigma_0, \dots, \sigma_p)} \eta_{(\sigma_{p+1}, \dots, \sigma_{p+q})}$ .

Ainsi  $C^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  est une algèbre graduée et  $\delta$  est une antidérivation pour  $\smile$ .

On vérifie que si  $\mathcal{U} < \mathcal{V}$  alors  $H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow H^*(\mathcal{V}, \mathbb{R})$  est un morphisme d'algèbres et donc la limite inductive  $H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  est munie d'une structure d'algèbre.

Remarque 4.52 : le produit du complexe de Čech reste valable dans le cas d'un espace topologique  $\bar{X}$  et permet donc d'induire une structure d'algèbre sur  $H^*(X, \mathbb{R})$ .

De la même façon, le cup produit  $\smile$  restreint à  $C^0(\mathcal{U}, \Omega^*)$  est compatible avec le produit extérieur.

Ainsi  $r : \Omega^*(M) \rightarrow \Sigma(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*))$  et  $i : C^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow \Sigma(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*))$  sont des morphismes d'algèbres graduées et donc dans le cas d'un recouvrement simple, les isomorphismes  $H_{DR}^*(M) \simeq H_D^*(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)) \simeq H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  sont des isomorphismes d'algèbres graduées.

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 4.53 : de de Rham

L'isomorphisme entre les cohomologies de Čech et de de Rham  $H^*(M, \mathbb{R}) \simeq H_{DR}^*(M)$  est un isomorphisme d'algèbres.

## A

## Rappels sur les algèbres

Une  $\mathbb{R}$ -algèbre  $A$  est graduée si elle est graduée comme espace vectoriel, c'est-à-dire  $A = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A^k$  avec  $A^k$  des sous-espaces vectoriels de  $A$  et si le produit interne vérifie  $A^p A^q \subset A^{p+q}$ .

Un élément de  $A^p$  est dit homogène de degré  $p$ .

Si de plus  $\forall(x, y) \in A^p \times A^q, xy = (-1)^{pq}yx$ , on dit que  $A$  est anticommutative.

Une application linéaire  $\varphi : A \rightarrow B$  entre algèbres graduées est homogène de degré  $k$  si  $\varphi(A^p) \subset B^{p+k}$ .

Un morphisme d'algèbres graduées est une application linéaire de degré 0.

Une antidérivation sur une algèbre graduée  $A$  est une application linéaire homogène de degré impair  $\alpha : A \rightarrow A$  qui vérifie  $\alpha(xy) = \alpha(x)y + (-1)^p x\alpha(y)$  si  $x \in A^p$  et si  $y \in A$ .

Si  $A$  et  $B$  sont deux  $\mathbb{R}$ -algèbres graduées, on définit le produit tensoriel  $A \otimes_{\mathbb{R}} B$  par  $(A \otimes_{\mathbb{R}} B)^r = \sum_{p+q=r} A^p \otimes_{\mathbb{R}} B^q$ .

Premier cas : produit tensoriel canonique

$$(x \otimes y)(x' \otimes y') = xx' \otimes yy'$$

Second cas : produit tensoriel anticommutatif

$$(x \otimes y)(x' \otimes y') = (-1)^{\deg(y)\deg(x')} xx' \otimes yy'$$

Dans le second cas, le produit tensoriel de deux algèbres graduées anticommutatives est anticommutatif. C'est celui que nous utiliserons dans le théorème de Künneth.

Une algèbre graduée différentielle est une algèbre graduée avec une antidérivation  $\delta$  homogène de degré 1 vérifiant  $\delta^2 = 0$ . Il s'agit donc d'un complexe de cochaînes. On vérifie facilement que la cohomologie est encore une algèbre graduée différentielle. De plus si  $A$  est anticommutative, il en est de même pour la cohomologie.

Si  $A$  et  $B$  sont des algèbres graduées différentielles, il en est de même pour  $A \otimes B$  avec l'antidérivation  $\delta(x \otimes y) = \delta(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes \delta(y)$  si  $x \in A^p$  et  $y \in B$ .

Quelques propriétés utiles :

- Si  $E$  ou  $F$  sont de dimension finie alors  $E^* \otimes F^* \simeq (E \otimes F)^*$  par  $(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x)g(y)$ .
- Le produit tensoriel est exact à droite.
- Le produit tensoriel entre deux algèbres graduées différentielles  $A$  et  $B$  induit un isomorphisme d'algèbres graduées  $H^*(A) \otimes H^*(B) \xrightarrow{\sim} H^*(A \otimes B)$ .

## Références

- [1] R. BOTT & L. W. TU, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Graduate texts in mathematics, Springer, troisième révision corrigée, première édition, 2000.
- [2] M. P. DO CARMO, *Differential Forms and Applications*, Universitext, Springer, 1994.
- [3] C. GODBILLON, *Éléments de topologie algébrique*, Hermann, 1971.
- [4] S. GONNORD & N. TOSEL, *Calcul différentiel, thèmes d'analyse pour l'agrégation*, Ellipses, 1998, p. 60–61.
- [5] J. LAFONTAINE, *Introduction aux variétés différentielles*, Grenoble sciences, EDP Sciences, nouvelle édition, 2010.
- [6] I. H. MADSEN & J. TORNEHAVE, *From Calculus to Cohomology : De Rham Cohomology and Characteristic Classes*, Cambridge University Press, 1997.
- [7] M. SPIVAK, *Calculus on manifolds : a modern approach to classical theorems of advanced calculus*, Perseus Books, 1965.
- [8] L. W. TU, *An Introduction to Manifolds*, Universitext, Springer, deuxième édition, 2010.
- [9] R. VANSTONE, S. HALPERIN & W. H. GREUB, *Connections, curvature, and cohomology, vol I : De Rham Cohomology of Manifolds and Vector Bundles*, Academic Press, 1972.
- [10] A. WEIL, *Sur les théorèmes de de Rham*, Commentarii Mathematici Helvetici, (1952), p. 119–145.
- [11] M. ZISMAN, *Topologie algébrique élémentaire*, Collection U, Armand Colin, 1972.