Localisation des valeurs propres : Quelques propriétés sur les disques de Gerschgorin.

Jean-Baptiste Campesato

22 septembre 2009

On retrouve de nombreuses équations aux valeurs propres (par exemple en physique : l'équation des ondes ou l'étude des vibrations ; en mathématiques : les systèmes d'équations linéaires ou des équations différentielles ordinaires). La recherche des valeurs propres est donc fondamentale en analyse numérique.
La localisation des valeurs propres consiste à réduire les parties pouvant contenir les valeurs propres d'un endomorphisme. Plusieurs méthodes existent, certaines plus fines que d'autres.
Nous allons présenter une méthode d'approximation globale, c'est à dire qui ne permet pas d'approximer chaque valeur propre, mais qui tente d'englober l'ensemble des valeurs propres : le *théorème de Gerschgorin*. Puis nous tenterons de l'affiner et d'étudier certaines propriétés auxilliaires.
Nous nous plaçons dans le cas d'endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie, et les représentons donc matriciellement.
Dans toute la suite $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ (pour la notion de valeur absolue) et n est un entier strictement positif.

Gerschgorin est parfois retranscrit en Gershgorin, Geršgorin, Hershhornou ou Hirschhorn.

1 Les théorèmes de Gerschgorin et de Hadamard

Définition

Soit $M = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ on nomme

$$D_i = B_f\left(a_{ii}, \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\right) = \left\{x \in \mathbb{K} \setminus |a_{ii} - x| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\right\}$$

Le $i$ème disque de Gerschgorin de M.

$B_f(\omega, r)$ est la boule fermée de centre $\omega \in \mathbb{C}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}^+$.

Théorème 1: théorème de Gerschgorin

Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.
L'ensemble des valeurs propres est inclus dans la réunion des disques de Gerschgorin, c'est à dire :
λ est une valeur propre de $M \Rightarrow \lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

Remarque : en remarquant que les valeurs propres de ${}^tM$ sont celles de M (par exemple via la définition du polynôme caractéristique), on peut montrer que la propriété reste vraie en posant $D'_j = B_f\left(a_{jj}, \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|\right)$ (on utilise les coordonnées en colonne cette fois).

Démonstration directe :

Soit λ une valeur propre de M, alors il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ tel que $MX = \lambda X$.
Comme les coordonnées de X sont en nombre fini non nul et sont non toutes nulles, il existe $i_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max(|x_i|, i \in [\![1;n]\!])$ et on remarque que $|x_{i_0}| > 0$.
En considérant la $i_0$ème ligne de $MX = \lambda X$, il vient :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j = \lambda x_{i_0} \quad &\Rightarrow \quad \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} a_{i_0 j} x_j = x_{i_0}(\lambda - a_{i_0 i_0}) \\ &\Rightarrow \quad |x_{i_0}||\lambda - a_{i_0 i_0}| = \left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} a_{i_0 j} x_j\right| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j} x_j| \\ &\Rightarrow \quad |\lambda - a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}| \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}|\end{aligned}$$

Car $x_{i_0} \neq 0$ et $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $|x_{i_0}| \geq |x_i|$.

On a donc $\lambda \in D_{i_0} \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

■

Démonstration comme corollaire du théorème de Hadamard (voir ci-dessous) :

Soit λ une valeur propre de M, alors 0 est valeur propre de $N = M - \lambda I_n$, qui n'est pas donc pas inversible.
Donc d'après le théorème de Hadamard, N n'est pas à diagonale strictement dominante, il existe donc un rang $i \in [\![1;n]\!]$ tel que $|a_{ii} - \lambda| = |b_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |b_{ij}| = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$.

Ce qui permet de conclure.

■

Définitions

Soit $M = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.
- M est dite à diagonale dominante si et seulement si
$\forall i \in [\![1;n]\!]$, $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$.
- M est dite à diagonale strictement dominante si et seulement si
$\forall i \in [\![1;n]\!]$, $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$.
- M est dite à diagonale fortement dominante si et seulement si
M est à diagonale dominante et $\exists i \in [\![1;n]\!]$, $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$.

Théorème 2: théorème de Hadamard

Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.
Si M est à diagonale strictement dominante alors M est inversible.

Démonstration directe 1 :

On veut montrer que :
$M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ est à diagonale strictement dominante $\Rightarrow M \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$.
Travaillons par contraposée :
$M \notin \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}) \Rightarrow M$ n'est pas à diagonale strictement dominante.

On va utiliser une démonstration similaire à celle du théorème de Gerschgorin :
Supposons $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ non inversible alors $0 = \mathrm{Det}(M) = \chi_M(0) \Rightarrow 0$ est valeur propre de M.

Alors il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
tel que $MX = 0$.
Comme les coordonnées de X sont en nombre fini non nul et sont non toutes nulles, il existe $i_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max\left(|x_i|,\, i \in [\![1;n]\!]\right)$ et on remarque que $|x_{i_0}| > 0$.
En considérant la $i_0$ème ligne de $MX = 0$ il vient :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} a_{i_0 j} x_j = a_{i_0 i_0} x_{i_0}$$
$$\Rightarrow \quad |a_{i_0 i_0}||x_{i_0}| = \left| \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} a_{i_0 j} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j} x_j|$$
$$\Rightarrow \quad |a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}| \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}|$$

Car $x_{i_0} \neq 0$ et $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $|x_{i_0}| \geq |x_i|$.
M n'est donc pas à diagonale strictement dominante.

■

Démonstration directe 2 :

Supposons par l'absurde que M n'est pas inversible, alors les vecteurs c_i, $i = 1 \dots n$, formés par les colonnes sont liés (une matrice est inversible si et seulement si elle est de rang maximal, ici n, c'est-à-dire si les vecteurs c_i sont libres).

Ainsi, il existe $(\lambda_j)_{j=1\dots n} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{ij} = 0$.

Soit $k \in [\![1;n]\!]$ tel que $|\lambda_k| = \max\{|\lambda_j|,\, j = 1 \dots n\}$ (forcément, $|\lambda_k| \neq 0$), alors $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{kj} = 0$, d'où $a_{kk} = -\sum_{j\neq k} \frac{\lambda_j}{\lambda_k} a_{kj}$. On a alors $|a_{kk}| \leq \sum_{j\neq k} |a_{kj}|$ car $\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_k}\right| \leq 1$.
D'où une contradiction.

■

Démonstration comme corollaire du théorème de Gerschgorin :

Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ à diagonale strictement dominante.
Alors $0 \notin \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.
Donc, d'après le théorème de Gerschgorin, 0 n'est pas valeur propre de M.
On a donc $0 \neq \chi_M(0) = \mathrm{Det}(M)$ et donc que $M \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$.

χ_M est le polynôme caractéristique de M.

■

Nous avons au passage ainsi montré que les deux théorèmes précédents étaient équivalents.

2 Améliorations du théorème de Gerschgorin

Dans cette partie nous allons présenter et démontrer certaines (parmi tant d'autres) améliorations de l'approximation de l'ensemble des valeurs propres par les disques de Gerschgorin.
Pour simplifier on nomme cercles de Gerschgorin les bords des disques de Gerschgorin, on a donc que le $i$ème cercle de Gerschgorin est $C_i = \left\{ x \in \mathbb{K} \setminus |a_{ii} - x| = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}$.

On rappelle que les D_i sont les disques de Gerschgorin selon les lignes et les D'_j ceux selon les colonnes.

Proposition 1

Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

Les valeurs propres de M sont incluses dans $\left(\bigcup_{i=1}^{n} D_i\right) \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{n} D'_j\right)$.

Démonstration :

Immédiat d'après la remarque de la première section. ∎

Voici quelques rappels non exhaustifs et sans démonstration sur les matrices (ir)réductibles :

Matrices (ir)réductibles

On rappelle qu'une matrice $M = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ est réductible :
• si et seulement s'il existe une matrice de permutation P tel que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$ (ou A est une matrice carrée).
• si et seulement s'il existe une partition (I, J) non triviale de $[\![1; n]\!]$ telle que $\forall (i, j) \in I \times J, a_{ij} = 0$.
• si et seulement s'il existe une partie J non triviale de $[\![1; n]\!]$ telle que le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_j \setminus j \in J\}$ soit stable par M (où les e_i forment la base canonique de $\mathbb{K}^n$).

On rappelle qu'une matrice $M = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ est irréductible :
• si et seulement si M n'est pas réductible.
• si et seulement si le graphe orienté associé à M est fortement connexe.
• si et seulement si $(I_n + M)^{n-1}$ est strictement positive.
• Une matrice ayant tous ses coefficients non nuls est irréductible.
• Une matrice ayant une ligne ou une colonne nulle est réductible.
• Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$. S'il existe un entier p tel que M^p ait tous ses coefficients non nuls alors M est irréductible.
• Une matrice carrée positive irréductible ne peut possèder deux vecteurs propres positifs linéairement indépendants.

Un graphe orienté est dit fortement connexe si et seulement pour tout couple (u, v) de nœuds il existe un chemin orienté reliant u à v et un autre reliant v à u.

Proposition 2: Taussky 1948

Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice irréductible.
Si une valeur propre de M est sur l'extrémité de la réunion des disques de Gerschgorin alors elle est forcément sur tous les cercles de Gerschgorin.

Démonstration utilisant la forte connexité :

Soit λ une valeur propre appartenant à l'extrémité de la réunion des disques de Gerschgorin.
On sait d'après la démonstration du théorème de Gerschgorin qu'il existe
$i_0 \in [\![1; n]\!]$ tel que $x_{i_0} = \max\left(|x_j| \setminus k \in [\![1; n]\!]\right)$ et que $|\lambda - a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}| \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|}$.
Puis comme λ n'est pas dans l'intérieur des disques, nous avons aussi :
$|\lambda - a_{i_0 i_0}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}|$.
Comme les $\frac{|x_j|}{|x_{i_0}|}$ sont inférieurs ou égaux à 1, la seule possibilité est que lorsque $a_{i_0 j} \neq 0$ ils soient égaux à 1. Ainsi $\forall j \in [\![1; n]\!]$, $a_{i_0 j} \neq 0 \Rightarrow |x_j| = |x_{i_0}|$.

Puis comme le graphe orienté associé à M est fortement connexe il existe au moins un p tel que $a_{i_0 p} \neq 0$, et on a donc alors $|x_p| = |x_{i_0}| = \max(|x_i|,\ i \in [\![1;n]\!])$.
Comme le graphe orienté associé à la matrice est fortement connexe on peut recommencer le raisonnement avec p au lieu de i_0 et ainsi de suite :
On a $|\lambda - a_{pp}| \leq \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} |a_{pj}| \dfrac{|x_j|}{|x_p|}$. Puis comme λ est sur l'extremité de la réunion des disques, on est forcément dans le cas d'égalité, puis comme les $\frac{|x_j|}{|x_p|}$ sont inférieurs ou égaux à 1, on a aussi que $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $a_{pj} \neq 0 \Rightarrow |x_j| = |x_p|$.
Ainsi pour tout $k \in [\![1;n]\!]$ on peut obtenir une suite $a_{i_0 p}, a_{pp_1}, \dots, a_{p_{m-1}k}$.
Ce qui nous permet de conclure que $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $|\lambda - a_{kk}| = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$.

■

Démonstration utilisant la propriété sur les partitions :

Soit λ une valeur propre à l'extrémité de la réunion des disques de Gerschgorin, alors il n'existe pas de $k \in [\![1;n]\!]$ tel que $|\lambda - a_{kk}| < \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$.
Donc $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $|\lambda - a_{kk}| \geq \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$. (1)
Or on a vu dans la démonstration du théorème de Gerschgorin qu'il existait au moins un $i \in [\![1;n]\!]$ tel que $|x_i| = \max(|x_j| \setminus k \in [\![1;n]\!])$ et qu'on avait alors
$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} |a_{ij}|$. (2)
On a donc pour ces i : $|\lambda - a_{ii}| = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$. (3) car (1) et (2)
Posons $I = \{i \in [\![1;n]\!] \setminus |x_i| = \max(|x_j| \setminus k \in [\![1;n]\!])\}$.
$I \neq \varnothing$ (on a vu qu'on avait au moins un élément vérifiant cette condition) et pour tout $i \in I$ on a, d'après (3) (pour la dernière égalité) :

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}||x_j| \geq ||\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j| = |\lambda - a_{ii}||x_i| = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}||x_i|$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (|a_{ij}|(|x_i| - |x_j|)) \leq 0.$$

Or il s'agit de termes positifs, donc $\forall j \in [\![1;n]\!] \setminus \{i\}$, $|a_{ij}|(|x_i| - |x_j|) = 0$.
Et donc si $j \notin I$, on a $(|x_i| - |x_j|) > 0 \Rightarrow a_{ij} = 0$.
Posons alors $J = \complement_{[\![1;n]\!]} I$.
Supposons $J \neq \varnothing$ alors pour tout $(i,j) \in I \times J$, $a_{ij} = 0$. Ce qui signifie que la matrice M est réductible, ce qui est absurde d'après l'hypothèse.
Donc $J = \varnothing$.
Et donc $\forall k \in [\![1;n]\!]$ on a forcément que $k \in I$ et donc : $|\lambda - a_{kk}| = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$.

■

$\complement_E A$ est le complémentaire de A dans E.

Corollaire : généralisation du théorème de Hadamard

Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.
Si M est irréductible et à diagonale fortement dominante alors M est inversible.

Démonstration :

Supposons que 0 soit valeur propre de M, comme M est fortement diagonale cela signifie que 0 appartient à l'extremité de la réunion des disques.
Puis comme M est fortement diagonale, il existe un cercle de Gerschgorin ne passant pas par 0.
Comme M est irréductible, il y a contradiction (d'après la proposition précédente).
Donc 0 ne peut être valeur propre et donc M est inversible.

■

Pour ce théorème, ses deux corollaires et la propriété suivante nous devons nous placer dans le cas ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ pour pouvoir utiliser la continuité dans $\mathbb{C}$ et aussi pour avoir n valeurs propres (en comptant leur multiplicité dans le polynôme caractéristique).

TODO : mieux rédiger la démonstration... ou faire un schéma...

Proposition 3

Soit $n \geq 2$ et $M = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.
Supposons que l'on ait $p \in [\![1; n-1]\!]$ et que l'on puisse diviser les disques de Gerschgorin de M en deux sous-ensembles disjoints de p et $n-p$ disques.
Alors le premier sous-ensemble contient p valeurs propres et le second contient $n-p$ valeurs propres.

Remarque : la démonstration se généralise pour un nombre de sous-ensembles d'union de disques disjoints supérieur à 2.
Démonstration :

Notons $D^{(p)}$ la réunion des p disques de l'hypothèse, et $D^{(q)}$ celle des $q = n-p$ disques restant. On a $D^{(p)} \bigcap D^{(q)} = \varnothing$.
Pour $\varepsilon \in [0; 1]$ définissons $B(\varepsilon) = (b_{ij}(\varepsilon)) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ par $b_{ij}(\varepsilon) = \begin{cases} a_{ii} & \text{si } i = j \\ \varepsilon a_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases}$.
On a $B(1) = M$ et $B(0)$ est la matrice diagonale ayant les mêmes termes diagonaux que M.
On sait que les valeurs propres de $B(0)$ sont les centres des disques de Gerschgorin de M et qu'exactement p valeurs propres de $B(0)$ sont les centres des disques de $D^{(p)}$.
Les valeurs propres de $B(\varepsilon)$ sont les zéros de son polynôme caractéristique qui a pour coefficients des fonctions continues en ε.
Donc lorsque ε parcourt $[0; 1]$, les valeurs propres de $B(\varepsilon)$ se déplacent continûment le long de chemins du plan complexe et le rayon des disques de Gerschgorin de $B(\varepsilon)$ varient de 0 à ceux des disques Gerschgorin de M.
Comme p des valeurs propres de $B(\varepsilon)$ sont dans $D^{(p)}$ lorsque $\varepsilon = 0$ et que les p disques de $D^{(p)}$ sont disjoints de ceux de $D^{(q)}$, ces p valeurs propres doivent encore être dans $D^{(p)}$ lorsque $\varepsilon = 1$ (par continuité).

■

Corollaire 1

Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.
Si un disque de Gerschgorin de M est isolé alors il contient une unique valeur propre.

Corollaire 2

Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.
Si les disques de Gerschgorin de M sont deux à deux isolés alors ils contiennent chacun une unique valeur propre de M.

Proposition 4

Soient $n \geq 2$ et $M = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.
Supposons que l'on ait $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!],\ i \neq j \Rightarrow |a_{ij}| \leq \varepsilon$ et que l'on ait aussi un certain $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ et un certain $r \in [\![1;n]\!]$ tel que
$\forall i \in [\![1;n]\!],\ i \neq r \Rightarrow |a_{rr} - a_{ii}| > \eta$.
Alors dès que l'on a $\varepsilon < \frac{\eta}{2(n-1)}$, il existe une unique valeur propre λ de M tel que $|\lambda - a_{rr}| < \frac{2(n-1)\varepsilon^2}{\eta}$.

Démonstration :

Soient $\kappa > 0$ et $K = (k_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $k_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \neq r \\ \kappa & \text{si } i = j = r \end{cases}$.
On pose $M' = KMK^{-1} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. M' est obtenue de M en multipliant les termes de la ligne r, sauf le terme diagonal, par κ et en multipliant les termes de la colonnes r, sauf le terme diagonal, par κ^{-1}.
Le disque de Gerschgorin de la ligne r de M' est donc centré sur a_{rr} et de rayon n'excedant pas $(n-1)\varepsilon\kappa$.
Nous voulons désormais réduire la taille de ce disque en choisissant une petite valeur pour κ tout en le convervant disjoint des autres disques.
Il suffit pour cela de poser $\kappa = \frac{2\varepsilon}{eta}$, en effet le rayon du disque r est alors inférieur à $\frac{2(n-1)\varepsilon^2}{\eta}$ et les rayons des autres disques sont inférieurs à $(n-2)\varepsilon + \frac{1}{2}\eta$. Ainsi on a bien que le disque r est disjoint des autres disques :

$$\begin{array}{rcl} R_r + R_i & \leq & \frac{2(n-1)\varepsilon^2}{\eta} + (n-2)\varepsilon + \frac{1}{2}\eta \\ & < & \varepsilon + (n-2)\varepsilon + \frac{1}{2}\eta \text{ d'après l'hypothèse sur } \varepsilon \\ & = & (n-1)\varepsilon + \frac{1}{2}\eta \\ & < & \eta \text{ toujours d'après cette hypothèse.} \end{array}$$

Ainsi $\forall i \in [\![1;n]\!]$ tel que $i \neq r$, les centres a_{ii} et a_{rr} sont éloignés d'au moins η et leurs disques sont donc disjoints.
Donc le disque r est disjoint de tous les autres disques et admet ainsi une unique valeur propre d'après le corollaire 1.
Nous obtenons ainsi le résultat attendu.

■

3 Illustrations et applications

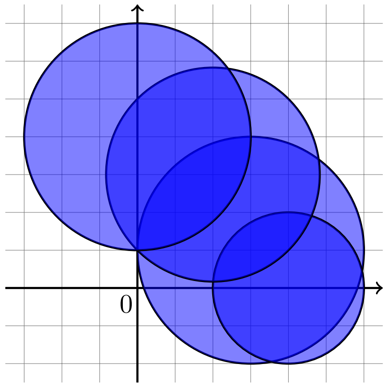
Comme nous travaillons en dimension finie les valeurs propres sont les valeurs spectrales, donc l'ensemble des valeurs propres est le spectre de l'endomorphisme pour le corps considéré. Pour une matrice $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ on notera donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}'}(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M qui sont dans $\mathbb{K}'$ (avec $\mathbb{K}'$ un sous-corps de $\mathbb{K}$).

3.1 Théorèmes de Gerschgorin et de Hadamard

Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: (les polynômes caractéristiques sont donc scindés dans $\mathbb{K}$)

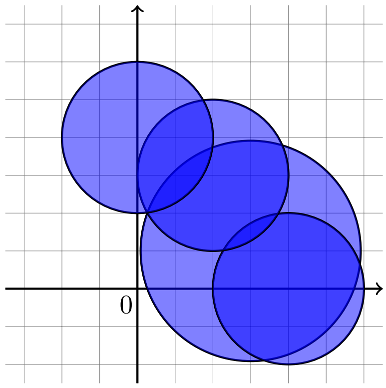
Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3+i & -1,5 & 0 & 1,5i \\ 0,5 & 4 & i & 0,5i \\ \sqrt{2} & \sqrt{2}i & 2+3i & 0 \\ i & 1 & i & 4i \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_4(\mathbb{C})$.

On remarque que A est à diagonale strictement dominante, donc d'après le théorème de Hadamard A est inversible.
On va maintenant localiser le spectre de A.
Les disques de Gerschgorin selon les lignes sont :
$B_f(3+i,\,3)$, $B_f(4,\,2)$, $B_f(2+3i,\,2\sqrt{2})$ et $B_f(4i,\,3)$.
On obtient ainsi une première localisation des valeurs propres :

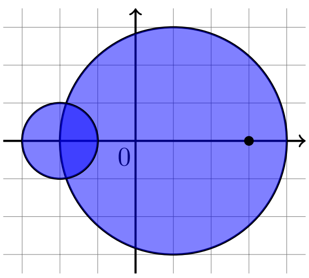


On remarque bien que 0 n'est pas valeur propre et donc que A est inversible comme l'indique le théorème de Hadamard.

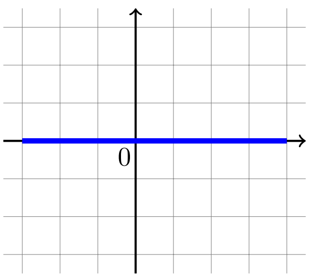
Les disques de Gerschgorin selon les colonnes sont :
$B_f(3+i,\, 1,5+\sqrt{2})$, $B_f(4,\, 2,5+\sqrt{2})$, $B_f(2+3i,\, 2)$ et $B_f(4i,\, 2)$.
On peut donc d'après la première proposition choisir pour chaque disque de Gerschgorin le rayon le plus petit entre celui obtenu via les colonnes et celui obtenu via les lignes.
On obtient ainsi les disques suivants :
$B_f(3+i,\, 1,5+\sqrt{2})$, $B_f(4,\, 2)$, $B_f(2+3i,\, 2)$ et $B_f(4i,\, 2)$.
Voici donc une localisation plus fine des valeurs propres :



Cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ **:** (les polynômes caractéristiques ne sont donc pas forcément scindés dans $\mathbb{K}$)
Considérons la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.
Comme B n'est pas à diagonale strictement dominante, on ne peut pas utiliser le théorème de Hadamard pour conclure sur l'inversibilité de B.
Les disques de Gerschgorin selon les lignes sont :
$B_f(1,\, 3)$, $B_f(3,\, 3)$ et $B_f(-2,\, 1)$.
Ceux selon les colonnes sont :
$B_f(1,\, 3)$, $B_f(3,\, 0)$ et $B_f(-2,\, 4)$.
On peut d'après la première proposition choisir le rayon le plus petit pour chaque disque de Gerschgorin. On obtient ainsi la localisation suivante du spectre :
$B_f(1,\, 3)$, $B_f(3,\, 0)$ (il s'agit du point $(3, 0)$) et $B_f(-2,\, 1)$.
On obtient ainsi comme localisation du spectre :



Localisation des valeurs propres complexes



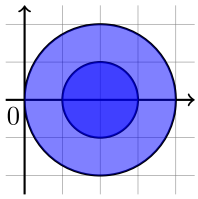
Localisation des valeurs propres réelles

Comme $\mathbb{R}$ n'est pas algébriquement clos (et que $\mathbb{C}$ est la clôture algébrique de $\mathbb{R}$) il se peut que le polynôme caractéristique de B ne soit pas scindé dans $\mathbb{R}$ et donc que certaines valeurs propres soient complexes.
C'est en effet le cas dans notre exemple où les valeurs propres de B sont 3, $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

On a donc illustré les théorèmes de Gerschgorin et de Hadamard ainsi que la proposition 1. Passons à la suite.

3.2 Proposition 2

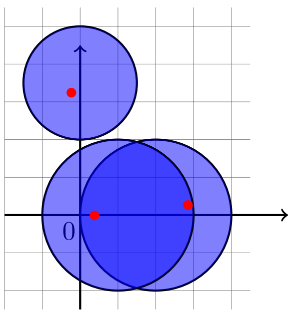
Soit $n > 3$. Considérons $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
C n'étant pas à diagonale strictement dominante, le théorème de Hadamard ne nous permet pas de conclure sur l'inversibilité de C.
Les disques de Gerschgorin sont $B_f(2,\, 1)$ et $B_f(2,\, 2)$:



Le graphe orienté associé à A est fortement de connexe : en effet tout nœud (sauf le premier et le dernier) a un arc le reliant au nœud précédent et un autre au nœud suivant, pour tout couple de nœuds on peut donc construire un chemin orienté les reliant.
Supposons maintenant que 0 soit valeur propre de C, alors comme 0 au bord de la réunion des disques de Gerschgorin, d'après la deuxième propriété, 0 devrait appartenir au premier cercle de Gerschgorin, ce qui n'est pas le cas. D'où la contradiction.
Donc 0 n'est pas valeur propre de C, ce qui signifie que $C \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ (il s'agit en fait du résultat du corollaire).

3.3 Proposition 3 et ses corollaires

Nous allons juste illustrer le corollaire 2.
Soit $D = \begin{pmatrix} 3,5i & 1 & 0,5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{C})$.
Les disques de Gerschgorin sont $B_f(3,5i,\, 1,5)$, $B_f(2,\, 2)$ et $B_f(1,\, 2)$:



Le premier disque de Gerschgorin est isolé, donc d'après le corollaire 2 de la proposition 3 il contient une unique valeur propre, les deux autres (en comptant la multiplicité dans le polynôme caractéristique toujours) sont dans la réunion des deux autres disques.

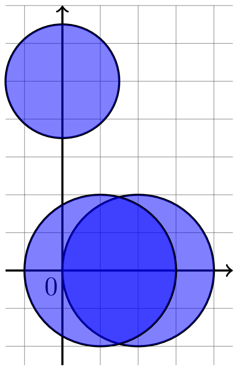
C'est en effet ce qu'on verifie : les valeurs propres ont été calculées à l'aide d'un logiciel de calcul formel et placées sur le graphique en rouge.

3.4 Proposition 4

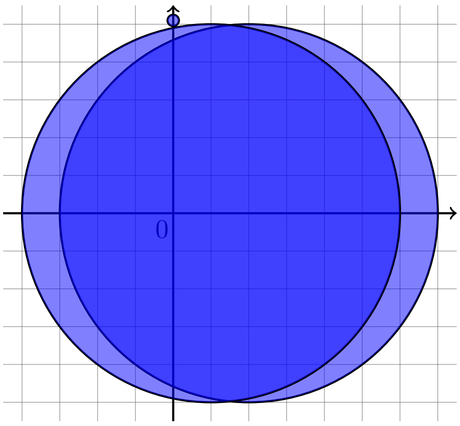
La proposition 4 nous dit que pour une matrice respectant les hypothèses, on peut trouver un disque de Gerschgorin de rayon de l'ordre de ϵ^2 si ϵ est suffisament petit.
Nous allons illustrer la démonstration.
Soit $E = \begin{pmatrix} 5i & 1 & 0,5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{C})$.

Soient $\kappa > 0$, $r \in [\![1;3]\!]$ et $K = (k_{ij}) \in \mathbf{M}_3(\mathbb{C})$ définie par $k_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \neq r \\ \kappa & \text{si } i = j = r \end{cases}$.

Posons $E' = KEK^{-1} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{C})$. E est obtenue de D en multipliant les termes de la ligne r, sauf le terme diagonal, par κ et en multipliant les termes de la colonnes r, sauf le terme diagonal, par κ^{-1}.
Si on pose $r = 1$ et $\kappa = 1/4$ on obtient :
$E' = \begin{pmatrix} 5i & 0,25 & 0,125 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
On a ainsi fait diminuer le premier disque de Gerschgorin tout en faisant augmenter les deux autres. Le but de la démonstration, avec les hypothèses, est de faire diminuer le disque contenant la valeur propre tout le gardant disjoint des autres disques qui eux augmentent. Une fois qu'on ne peut plus faire diminuer le disque (sinon les autres qui augmentent vont le toucher) on a une bonne estimation pour cette méthode : comme le disque est isolé on sait qu'il contient la valeur propre d'où l'approximation.



Localisation des valeurs propres de E



Localisation des valeurs propres de E'

4 Bibliographie

Pour aller plus loin :
- An introduction to numerical analysis de Endre Süli et David F. Mayers.
- Matrix iterative analysis de Richard S. Varga
- Minimal Gerschgorin sets de Richard S. Varga