Correspondance de Galois des revêtements

Jean-Baptiste Campesato

26 septembre 2011

Avant-propos

Le présent document fait suite au mémoire [1] que j'ai corédigé avec Agnès Marchand sous la direction d'Ingo Waschkies. Nous en reprenons les notations et les résultats et nous y ferons souvent référence.
Il s'agit d'établir une correspondance biunivoque entre les classes d'isomorphie des revêtements connexes pointés d'un espace topologique localement semi-1-connexe et les sous-groupes du groupe fondamental de cet espace en un point fixé.
Nous présentons d'abord la notion d'action de groupe qui sera très présente tout au long de l'exposé, pour ensuite étudier l'action de monodromie définie dans [1]. En ce qui concerne les définitions et les propriétés des revêtements, le lecteur est renvoyé à [1]. Nous verrons ensuite les propriétés des revêtements galoisiens, et utiliserons l'équivalence de catégories de [1] pour démontrer la correspondance.
L'annexe C propose une autre démonstration qui utilise la notion d'action de groupe continue et qui permet de transporter facilement l'ordre d'inclusion des sous-groupes du groupe fondamental.

Table des matières

1 Rappels sur les actions de groupe

Le concept d'action de groupe permet de décrire les « symétries » des objets étudiés en utilisant la notion de groupe, ce qui permet de synthétiser de nombreuses définitions. Ainsi, par exemple, un espace affine est la donnée d'une action simplement transitive d'un espace vectoriel sur un ensemble. L'abstraction ainsi obtenue nous permet de généraliser des concepts géométriques et algébriques à des ensembles plus exotiques.
Nous ne traiterons dans ce paragraphe que d'actions de groupe à gauche, cependant toutes les propositions s'adaptent aux actions de groupe à droite, telle l'action de monodromie.

Nous avons fait le choix de noter les groupes multiplicativement dans toute cette section. De même nous n'avons pas souhaité aborder la notion d'action continue de groupe topologique dans cette partie car cette dernière ne nous sera pas utile sauf dans l'annexe C, où les résultats utilisés seront rappelés. Il s'agit cependant d'une notion riche en résultats qui peuvent s'appliquer à la théorie des revêtements et aux groupes fondamentaux. Je vous renvoie donc à la littérature mathématique.

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1 : action de groupe

Soient E un ensemble et G un groupe. On dit que G *agit* (ou *opère*) sur E s'il existe un morphisme de groupes $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(E)$.
Nous noterons $g \cdot x = [\varphi(g)](x)$ et φ est appelé *morphisme structurel de l'action.*

Caractérisation 1.2

Une action de groupe est donnée de façon équivalente par une loi de composition externe sur E, $\begin{array}{ccc} G \times E & \longrightarrow & E \\ (g,x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$ vérifiant :
- $\forall (g,h,x) \in G^2 \times E$, $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$.
- $\forall x \in E$, $e \cdot x = x$ où e est le neutre de G.

Démonstration :

$\Rightarrow$: découle des propriétés des morphismes de groupes.
$\Leftarrow$: Pour $g \in G$ fixé, $f_g : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$ est bien une bijection d'inverse $f_{g^{-1}}$. On vérifie aisément que $g \to f_g$ est un morphisme de groupes.

■

Exemples :

1. *Action triviale :* soit G un groupe et E un ensemble, alors le morphisme $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(E) \\ g & \longmapsto & Id_E \end{array}$ définit une action $g \cdot x = x$.
2. *Action par translation à gauche :* un groupe G opère sur lui-même par $g \cdot h = gh$.
3. *Action par conjugaison (ou par automorphismes intérieurs) :* un groupe G opère sur lui-même par $g \cdot h = ghg^{-1}$.
4. *Action naturelle :* le groupe des permutations (bijections) $\mathfrak{S}_E$ d'un ensemble E agit naturellement sur cet ensemble par le morphisme $Id_{\mathfrak{S}_E}$, on a alors $\sigma \cdot x = \sigma(x)$.

Définition 1.3 : orbite d'un point

Soit un groupe G opérant sur un ensemble E.
On appelle *orbite de* $x \in E$ (ou *trajectoire de* $x \in E$) l'ensemble $G \cdot x = \{g \cdot x,\, g \in G\}$.

Exemple : Si g est un élément du centre de G alors l'orbite de g pour l'action par conjugaison de G est réduite à $\{g\}$.
En particulier si G est un groupe commutatif, il y a $\mathrm{card}(G)$ orbites pour l'action par conjugaison qui sont les singletons.

Proposition 1.4

Soit un groupe G opérant sur un ensemble E.
Les orbites des éléments de E forment une partition de E.
On a donc une relation d'équivalence sur E donnée par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (\exists g \in G,\, y = g \cdot x)$ dont les classes d'équivalence sont les orbites.

Démonstration :

Tout élément de E est dans une orbite : soit $x \in E$, alors $x = e \cdot x$.
Les orbites sont disjointes : soit $z \in G \cdot x \cap G \cdot y$, alors il existe g et h dans G tels que $z = g \cdot x = h \cdot y$ ainsi $x = (g^{-1}h) \cdot y$ et $G \cdot x \subset G \cdot y$. De la même façon nous avons l'inclusion inverse. Ainsi $G \cdot x \cap G \cdot y \neq \varnothing \Rightarrow G \cdot x = G \cdot y$.

■

Définition 1.5 : action transitive

On dit que G opère transitivement sur E si $\forall (x, y) \in E^2,\, \exists g \in G,\, y = g \cdot x$.
Ce qui revient à dire que l'action de groupe n'admet qu'une seule orbite.

Nous nous sommes occupés des $g \cdot x$ où x était fixé et où g parcourait G, nous allons maintenant nous intéresser aux éléments de G laissant invariant un point de E.

Définition-Proposition 1.6 : stabilisateur (sous-groupe d'isotropie)

Soient G un groupe opérant sur un ensemble E et $x \in E$.
L'ensemble $G_x = \{g \in G,\, g \cdot x = x\}$ des éléments de G laissant invariant x est un sous-groupe de G nommé *stabilisateur de* x (ou *sous-groupe d'isotropie de* x *suivant* G).

Démonstration :

- $e \in G_x$.
- $g \in G_x \Rightarrow g \cdot x = x \Rightarrow x = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot x \Rightarrow g^{-1} \in G_x$.
- $g, h \in G_x \Rightarrow (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = x \Rightarrow gh \in G_x$.

■

Définition 1.7 : action libre

On dit que G opère librement sur E si tous les stabilisateurs sont réduits au neutre.
Ce qui revient à dire que tout élément différent du neutre agit sans point fixe :
$\forall x \in E,\, \forall g \in G,\, g \cdot x = x \Rightarrow g = e$.

Caractérisation 1.8

Un groupe G opère librement sur E si et seulement si pour tous $x, y \in E$, il existe au plus un $g \in G$ vérifiant $g \cdot x = y$.

Définition 1.9 : action simplement transitive

Une action est dite simplement transitive si elle est libre et transitive.

Exemple : L'action d'un groupe sur lui même par translation est simplement transitive.

Caractérisation 1.10

Un groupe G opère simplement transitivement sur un ensemble E si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2$, $\exists ! g \in G$, $y = g \cdot x$.

Théorème 1.11

Soient G un groupe opérant sur un ensemble E, $x \in E$ et $y = g \cdot x \in G \cdot x$.
Alors $G_y = gG_xg^{-1}$, on dit que G_x et G_y sont conjugués.
En particulier ils sont équipotents.

Ce théorème dit que les sous-groupes d'isotropie de deux éléments d'une même orbite sont conjugués.

Démonstration :

$$\begin{aligned} h \in G_y &\Leftrightarrow h \cdot y = y \\ &\Leftrightarrow (hg) \cdot x = h \cdot (g \cdot x) = h \cdot y = y = g \cdot x \\ &\Leftrightarrow (g^{-1}hg) \cdot x = g^{-1} \cdot ((hg) \cdot x) = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = x \\ &\Leftrightarrow g^{-1}hg \in G_x \\ &\Leftrightarrow h \in gG_xg^{-1} \end{aligned}$$

■

Définition-Proposition 1.12 : noyau d'une action

Soit G un groupe opérant sur un ensemble E.
On nomme noyau de l'action de G sur E l'ensemble des éléments de G laissant stables tous les points de E : $N = \{g \in G, \forall x \in E, g \cdot x = x\}$.
C'est un sous-groupe distingué de G et il s'agit même du noyau du morphisme structurel.

Démonstration :

Première méthode :

• $N = \bigcap_{x \in E} G_x$, il s'agit d'un sous-groupe de G comme intersection de sous-groupes.

• Soient $g \in G$ et $n \in N$, alors $\forall x \in E$, $(gng^{-1}) \cdot x = g \cdot (n \cdot (g^{-1} \cdot x)) = g \cdot (g^{-1} \cdot x) = x$, donc $gng^{-1} \in N$. Ainsi $gNg^{-1} \subset N$.

Seconde méthode :

Il suffit de remarquer que N est le noyau du morphisme structurel de l'action : $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(E) \\ g & \longmapsto & x \mapsto g \cdot x \end{array}$.

■

Pour résumer : une action est libre si elle n'admet aucun couple $(g, x) \in G \setminus \{e\} \times E$ vérifiant $g \cdot x = x$ et une action est fidèle si elle n'admet aucun élément de G autre que le neutre fixant tous les points de E.

Définition 1.13 : action fidèle

On dit qu'un groupe G agit fidèlement sur un ensemble E, si le noyau de l'action est réduit au neutre.

Caractérisation 1.14

Un groupe G agit fidèlement sur un ensemble E si et seulement si son morphisme structurel est injectif.

Proposition 1.15

Une action libre est fidèle.

Ainsi une action simplement transitive est donc fidèle et transitive. Lorsque G est commutatif, nous avons une réciproque :

Proposition 1.16

Une action fidèle et transitive d'un groupe *commutatif* est simplement transitive.

Remarque : l'hypothèse de commutativité est importante, l'action naturelle est fidèle et transitive mais non simplement transitive (lorsque $\mathrm{Card}(E) > 2$).

Démonstration :

Soit G un groupe commutatif opérant transitivement et fidèlement sur E.
Soient $x \in E$ et $g \in G$ tels que $g \cdot x = x$.
Alors pour tout $y \in E$, il existe $h \in G$ tel que $h \cdot x = y$, on a ensuite $g \cdot y = (gh) \cdot x = (hg) \cdot x = h \cdot x = y$. L'action étant fidèle, il vient que $g = e$.

■

Proposition 1.17

Soit G un groupe agissant sur un ensemble E.
Alors cette action induit une action fidèle de G/N sur E.

Démonstration :

Méthode 1 :
• Montrons que $\overline{g} \cdot x = g \cdot x$ définit bien une action de G/N sur E : si $\overline{g} = \overline{g'}$ alors $g' = gn \in gN$ et donc pour tout $x \in E$, $\overline{g'} \cdot x = (gn) \cdot x = g \cdot x$.
• Montrons que le noyau de cette action est réduit au neutre : soit $\overline{g} \in G/N$ tel que $\forall x \in E$, $\overline{g} \cdot x = x$, i.e. $g \cdot x = x$, donc $g \in N$, i.e. $\overline{g} = N = \overline{e}$.
Méthode 2 :
Soit $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(E)$ le morphisme structurel de l'action, d'après la propriété universelle des morphismes, il existe un unique morphisme $\overline{\varphi} : G/N \to E$ ($N = \mathrm{Ker}(\varphi)$) vérifiant $\overline{\varphi}(\overline{g}) = \varphi(g)$ et $\overline{\varphi}$ est injectif.
Ainsi G/N agit fidèlement sur E.

■

1.2 Formule des classes et formule de Burnside

$g\mathcal{R}h \Leftrightarrow g \in hG_x \Leftrightarrow$
$g \cdot x = h \cdot x$

Proposition 1.18

Soient G un groupe opérant sur un ensemble E et $x \in E$.
L'ensemble des classes à gauche G/G_x de G suivant G_x est équipotent à l'orbite $G \cdot x$.

Démonstration :

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \cdot x \\ g & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$ est surjective par définition.
Soient $g, h \in G$, alors $\varphi(g) = \varphi(h) \Leftrightarrow g \cdot x = h \cdot x \Leftrightarrow (h^{-1}g) \cdot x = x \Leftrightarrow h^{-1}g \in G_x \Leftrightarrow$ g et h sont dans la même classe modulo G_x.
Donc en passant au quotient, φ induit une bijection $G/G_x \to G \cdot x$.

■

Corollaire 1.19

Soit G un groupe opérant transitivement sur un ensemble E et $x \in E$.
L'ensemble des classes à gauche G/G_x de G suivant G_x est équipotent à E.

Démonstration :

L'action étant transitive, elle n'admet qu'une seule orbite. Or les orbites forment une partition de E. Donc $G \cdot x = E$, en appliquant 1.18, il vient $G/G_x \simeq G \cdot x = E$.

■

Théorème 1.20 : formule des classes

Soient G un groupe *fini* opérant sur un ensemble *fini* E et $\{x_1, \dots, x_q\}$ un système de représentants des orbites.
Alors $\operatorname{Card} E = \sum_{i=1}^{q} \operatorname{Card}(G \cdot x_i) = \sum_{i=1}^{q} [G : G_{x_i}] = \sum_{i=1}^{q} \frac{\operatorname{Card} G}{\operatorname{Card} G_{x_i}}$.

Démonstration :

Les orbites forment une partition de E, d'où la première égalité. Puis d'après la proposition 1.18, $\operatorname{Card}(G \cdot x_i) = [G : G_{x_i}]$.

■

Théorème 1.21 : Formule de Burnside

Soit G un groupe *fini* opérant sur un ensemble *fini* E.
Le nombre d'orbites est donné par $\frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g \in G} \operatorname{Card}\{x \in E,\ g \cdot x = x\}$.

Démonstration :

Soient $A = \{(g, x) \in G \times E,\ g \cdot x = x\}$ et Ω l'ensemble des orbites.
Alors $\operatorname{Card} A = \sum_{x \in E} \operatorname{Card} G_x = \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{x \in \omega} \operatorname{Card} G_x$.
Puis d'après la proposition 1.18, $\sum_{x \in \omega} \operatorname{Card} G_x = \sum_{x \in \omega} \frac{\operatorname{Card} G}{\operatorname{Card} \omega} = \operatorname{Card} G$.
Donc $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} \Omega \operatorname{Card} G$.
Mais on a aussi $\operatorname{Card} A = \sum_{g \in G} \operatorname{Card}\{x \in E,\ g \cdot x = x\}$.
D'où l'égalité recherchée.

■

1.3 Applications $G-$équivariantes

Définition 1.22 : application $G-$équivariante

Soit G un groupe opérant sur deux ensembles E et F.
Une application $f : E \to F$ est dite $G-$équivariante si $\forall g \in G$, $\forall x \in E$, $f(g\cdot x) = g\cdot f(x)$.

Ce qui revient à dire que la fonction commute avec les deux actions du groupe G, ce qui peut se représenter par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g\cdot"] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[d, "f"] \\ F \arrow[r, "g\cdot"'] & F \end{tikzcd}$$

Proposition 1.23

Soit G un groupe opérant transitivement sur un ensemble E.
Soient φ_1 et φ_2 deux bijections de E $G-$équivariantes telles qu'il existe $x \in E$ vérifiant $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$.
Alors $\varphi_1 = \varphi_2$.

Démonstration :

Soit $y \in E$, il existe $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$, alors $\varphi_1(y) = \varphi_1(g \cdot x) = g \cdot \varphi_1(x) = g \cdot \varphi_2(x) = \varphi_2(g \cdot x) = \varphi_2(y)$.

■

On peut améliorer le corollaire 1.19 :

Proposition 1.24

Soient G un groupe opérant transitivement sur un ensemble E et $x \in E$.
Remarquons que G agit aussi sur G/G_x par $g \cdot hG_x = ghG_x$.
Il existe alors une bijection $G-$équivariante entre G/G_x et E.

Démonstration :

Soit $\alpha : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & E \\ g & \longmapsto & g\cdot x \end{array}$.
Montrons que α est surjective : soit $y \in E$, alors par transitivité de l'action, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$, donc $y = \alpha(g)$.
Soient $g, h \in G$ alors $\alpha(g) = \alpha(h) \Leftrightarrow g \cdot x = h \cdot x \Leftrightarrow x = (g^{-1}h) \cdot x \Leftrightarrow g^{-1}h \in G_x \Leftrightarrow$ g et h sont dans la même classe à gauche de G suivant G_x.
On peut donc passer α au quotient et on obtient une bijection
$\overline{\alpha} : \begin{array}{ccc} G/G_x & \longrightarrow & E \\ gG_x & \longmapsto & g\cdot x \end{array}$ (voir le lemme 4.25 p.22 de [1] s'il y a besoin de détails).
Il nous reste à vérifier que $\overline{\alpha}$ est $G-$équivariante : $\overline{\alpha}(g \cdot hG_x) = \alpha(ghG_x) = gh \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot \overline{\alpha}(hG_x)$.

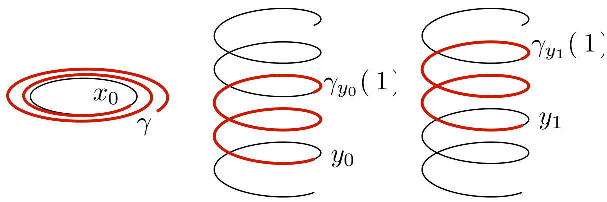
■

2 Action de monodromie sur la fibre

2.1 Rappels

Dans le cadre du mémoire [1] (Définition 4.2 p.13), nous avions construit à partir d'un revêtement $p : Y \to X$ sa représentation (au sens catégorique) dite de monodromie μ_p. En particulier lorsque nous nous restreignons aux classes d'homotopie des lacets d'origine $x_0 \in X$, nous obtenons un morphisme de groupes $\mu_p : \pi_1(X, x_0) \to \mathrm{Aut}(p^{-1}(x_0))$. On obtient ainsi une action dite de monodromie du groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$ sur la fibre $p^{-1}(x_0)$.
Nous allons commencer par rappeler brièvement la construction de l'action de monodromie. Nous avons vu (Théorème 3.17 de [1]) que tout lacet $\gamma : x_0 \rightsquigarrow x_0$ de la base X se relève de façon unique en un chemin $\tilde{\gamma_{y_0}}$ de Y dès lors que l'on fixe une origine y_0 dans la fibre $p^{-1}(x_0)$. De même nous avons vu que deux lacets homotopes se relèvent en deux chemins homotopes dès que l'on fixe une origine commune, en particulier les relèvements de même origine de deux chemins homotopes ont même extrémité, ainsi $\tilde{\gamma_{y_0}}(1)$ ne dépend pas du choix du représentant de la classe $[\gamma]$. Nous pouvons ainsi construire l'application $\mu_p([\gamma]) : \begin{array}{ccc} p^{-1}(x_0) & \longrightarrow & p^{-1}(x_0) \\ y_0 & \longmapsto & \tilde{\gamma_{y_0}}(1) \end{array}$.
On obtient ensuite le morphisme de groupes $\mu_p : \begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(p^{-1}(x_0)) \\ [\gamma] & \longmapsto & \mu_p([\gamma]) \end{array}$ (la vérification est faite dans [1], lemme 4.1 p.12).

La figure suivante représente l'action de monodromie en relevant un lacet γ du cercle $\mathbb{S}^1$ selon deux origines différentes y_0 et y_1 dans la fibre $p^{-1}(x_0) \subset \mathbb{R}$ pour le revêtement $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$ (cf [1] §3.3 p7) :



L'action de monodromie est une action à droite de $\pi_1(X, x_0)$ sur la fibre $p^{-1}(x_0)$: nous noterons $y_0 \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma_{y_0}}(1)$. Nous devons faire agir le groupe fondamental sur la fibre par la droite afin d'obtenir une notation compatible avec notre loi de composition interne du groupe fondamental définie au début de [1] : $(y_0 \cdot [\gamma]) \cdot [\delta] = \tilde{\gamma_{y_0}}(1) \cdot [\delta] = \widetilde{\delta_{\tilde{\gamma_{y_0}}(1)}}(1) = \widetilde{(\gamma \perp \delta)_{y_0}}(1)$, cette dernière égalité ayant été justifiée dans [1] (lemme 4.1 pp.12–13). Il vient donc $(y_0 \cdot [\gamma]) \cdot [\delta] = y_0 \cdot ([\gamma \perp \delta]) = y_0 \cdot ([\gamma][\delta])$.

2.2 Propriétés de l'action de monodromie

Nous allons désormais pouvoir nous intéresser aux propriétés de l'action de monodromie. Nous avons vu que le foncteur $\Pi_1(p)$ est fidèle ([1], lemme 4.16 p.18, défini en p.2), nous avons donc en particulier la proposition suivante.

Lemme 2.1

Soient $p : Y \to X$ un revêtement, $y_0 \in Y$ et $x = p(y_0)$.
Alors $\Pi_1(p) : \begin{array}{ccc} \pi_1(Y, y_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0) \\ [\gamma] & \longmapsto & [p \circ \gamma] \end{array}$ est un morphisme de groupes injectif.

Nous allons pouvoir réaliser la même identification que dans [1] à la page 18 :
Le morphisme $\Pi_1(p)$ étant injectif (2.1), il induit donc un isomorphisme de groupes entre $\pi_1(Y, y_0)$ et $\mathrm{Im}(\Pi_1(p)) \subset \pi_1(X, x_0)$. Ainsi pour tout y_0 dans la fibre $p^{-1}(x_0)$ nous noterons donc $\pi_1(Y, y_0)$ comme sous-groupe de $\pi_1(X, x_0)$ défini par $\{[p \circ \gamma], [\gamma] \in \pi_1(Y, y_0)\}$.
En d'autres termes, nous parlerons de $\pi_1(Y, y_0)$ comme sous-groupe de $\pi_1(X, x_0)$ pour signifier

$\Pi_1(p)(\pi_1(Y, y_0))$, afin d'alléger les notations.

Proposition 2.2

Le sous-groupe stabilisateur de $y \in p^{-1}(x_0)$ par l'action de $\pi_1(X, x_0)$ sur la fibre $p^{-1}(x_0)$ est $\pi_1(Y, y)$.

Démonstration :

Soit $[\delta] \in \pi_1(X, x_0)$ fixant y : on a alors $\tilde{\delta_y}(1) = y \cdot [\delta] = y$.
Ainsi $\tilde{\delta_y}$ est un lacet de Y en y et $\delta = p \circ \tilde{\delta_y}$, d'où $[\delta] = [p \circ \tilde{\delta_y}] \in \Pi_1(p)(\pi_1(Y, y))$.
Réciproquement si $[p \circ \gamma] \in \Pi_1(p)(\pi_1(Y, y))$, $y \cdot [p \circ \gamma] = \gamma(1) = y$, donc $[p \circ \gamma]$ fixe y. ■

Rappelons qu'un revêtement $p : Y \to X$ est un homéomorphisme local, ainsi les propriétés locales supposées sur l'espace total sont aussi valables pour l'espace de base, et réciproquement. De même, il faut garder en mémoire qu'un espace connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs.

Propositions 2.3

Soient $p : Y \to X$ un revêtement d'espace total Y connexe par arcs et $x_0 \in X$.
- Le groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$ agit transitivement sur la fibre $p^{-1}(x_0)$.
- De plus, si l'on se donne $y_1, y_2 \in p^{-1}(x_0)$, les groupes fondamentaux $\pi_1(Y, y_1)$ et $\pi_1(Y, y_2)$ sont deux sous-groupes conjugués de $\pi_1(X, x_0)$.

Remarque : ainsi, sous ces hypothèses, les sous-groupes $\pi_1(Y, y)$, $y \in p^{-1}(x_0)$, forment une classe de conjugaison des sous-groupes de $\pi_1(X, x_0)$. En effet, on démontre aisément et sans hypothèse sur Y, que si H est un sous-groupe de $\pi_1(X, x_0)$ conjugué à un sous-groupe de la forme $\pi_1(Y, y_1)$ où $y_1 \in p^{-1}(x_0)$ alors il existe $y_2 \in p^{-1}(x_0)$ tel que $H = \pi_1(Y, y_2)$.
Démonstration :

Soient $y_1, y_2 \in p^{-1}(x_0)$, Y étant connexe par arcs il existe un chemin $\gamma : y_1 \rightsquigarrow y_2$.
Puis γ est l'unique relèvement de $p \circ \gamma : x_0 \rightsquigarrow x_0$ d'origine y_1, donc $y_2 = \gamma(1) = y_1 \cdot [p \circ \gamma]$.
Ainsi l'action de monodromie est transitive.

Première méthode :
Soit $[\delta] \in \pi_1(Y, y_2)$, alors $[\gamma][\delta][\gamma]^{-1} \in \pi_1(Y, y_1)$. Donc $[\gamma]\pi_1(Y, y_2)[\gamma]^{-1} \subset \pi_1(Y, y_1)$.
Soit $[\rho] \in \pi_1(Y, y_1)$, posons $[\delta] = [\gamma]^{-1}[\rho][\gamma] \in \pi_1(Y, y_1)$ alors $[\rho] = [\gamma][\delta][\delta]^{-1}$, donc $[\gamma]\pi_1(Y, y_2)[\gamma]^{-1} = \pi_1(Y, y_1)$.
On obtient le résultat en remarquant que $p \circ (\gamma_1 \perp \gamma_2) = p \circ \gamma_1 \perp p \circ \gamma_2$.
Seconde méthode :
D'après 2.2, $\pi_1(Y, y_1)$ et $\pi_1(Y, y_2)$ sont les deux sous-groupes de $\pi_1(X, x_0)$ stabilisateurs respectivement de y_1 et y_2. Comme $y_2 = y_1 \cdot [p \circ \gamma]$, ces deux sous-groupes sont conjugués d'après 1.11. ■

Proposition 2.4

Soient $p : Y \to X$ un revêtement d'espace de base X connexe par arcs et $x_0 \in X$.
Alors l'ensemble des composantes connexes par arcs de Y est en bijection avec l'ensemble des orbites de l'action de $\pi_1(X, x_0)$ sur la fibre $p^{-1}(x_0)$.

Démonstration :

Considérons l'application $\alpha : p^{-1}(x_0) \to \{\text{composantes connexes par arcs de } Y\}$ qui à y dans la fibre $p^{-1}(x_0)$ associe sa composante connexe par arcs dans Y.

Montrons que α est surjective : soit Z une composante connexe par arcs de Y, et soit $y \in Z$. Il existe un chemin $\gamma : p(y) \to x_0$ de X du fait de la connexité par arcs de ce dernier, et $\tilde{\gamma_y}(1) \in p^{-1}(x_0)$. Comme $\tilde{\gamma_y} : y \rightsquigarrow \tilde{\gamma_y}(1)$, $\tilde{\gamma_y}(1)$ est dans la composante connexe par arcs de y, i.e. dans Z. Donc $Z = \alpha(\tilde{\gamma_y}(1))$.

Supposons que deux points y_1 et y_2 de la fibre $p^{-1}(x_0)$ soient dans la même composante connexe par arcs, il existe alors un chemin $\gamma : y_1 \rightsquigarrow y_2$ de Y. Puis $p \circ \gamma$ est un lacet en x_0 de X et $y_1 \cdot [p \circ \gamma] = \gamma(1) = y_2$, donc y_1 et y_2 sont dans la même orbite.
Réciproquement si l'on se donne deux points y_1 et y_2 de la fibre $p^{-1}(x_0)$ dans la même orbite, $\exists [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, $y_2 = y_1 \cdot [\gamma]$ et $\tilde{\gamma_{y_1}} : y_1 \rightsquigarrow y_2$. Donc y_1 et y_2 sont dans la même composante connexe par arcs de Y.
Ainsi $\alpha(y_1) = \alpha(y_2) \Leftrightarrow y_1$ et y_2 sont dans la même orbite.
Donc α passe au quotient (voir le lemme 4.25 p.22 de [1]) et définit une bijection entre les orbites de l'action de monodromie et la fibre $p^{-1}(x_0)$: $\{y \cdot \pi_1(X, x_0), y \in p^{-1}(x_0)\} \simeq p^{-1}(x_0)$.

■

Proposition 2.5

Soient $p : Y \to X$ un revêtement d'espace de base X connexe par arcs et $x_0 \in X$.
Alors Y est connexe par arcs si et seulement si $\pi_1(X, x_0)$ agit transitivement sur la fibre $p^{-1}(x_0)$.

Démonstration :

$\Rightarrow$: le résultat est déjà valable sans aucune hypothèse sur X d'après 2.3.
$\Leftarrow$: si $\pi_1(X, x_0)$ agit transitivement sur la fibre, alors l'action de monodromie n'admet qu'une orbite, ainsi, d'après 2.4, Y n'admet qu'une composante connexe par arcs et est donc connexe par arcs.

■

Proposition 2.6

Soient $p : Y \to X$ un revêtement d'espace total Y connexe par arcs et $x_0 \in X$.
Alors pour tout $y \in p^{-1}(x_0)$, il existe une bijection $\pi_1(X, x_0)-$équivariante entre l'ensemble des classes à droite $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(Y, y) = \{\pi_1(Y, y_0)[\sigma], [\sigma] \in \pi_1(x, x_0)\}$ de $\pi_1(X, x_0)$ suivant le sous-groupe $\pi_1(Y, y)$ et la fibre $p^{-1}(x_0)$.

En particulier si Y est connexe par arcs et si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $p : Y \to X$ est un revêtement à n feuillets si et seulement si $\pi_1(Y, y)$ est un sous-groupe d'indice n de $\pi_1(X, x)$.
Démonstration :

L'espace total Y étant connexe par arcs, d'après 2.3, l'action de monodromie est transitive.
Ensuite, pour tout $y \in p^{-1}(x_0)$, le stabilisateur de y est $\pi_1(Y, y)$ (2.2).
On obtient donc le résultat recherché en appliquant 1.24.

■

Remarque : voici une autre relation d'équipotence qui peut être utile ! Nous savons que $\pi_1(Y, y)$ est le stabilisateur de y selon l'action de monodromie (2.2), donc d'après 1.18, $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(Y, y)$ est équipotent à l'orbite de y.

Proposition 2.7

Soient $p : Y \to X$ un revêtement d'espace total Y connexe par arcs, $x_0 \in X$ et $y_0 \in p^{-1}(x_0)$.
Alors p est homéomorphisme si et seulement si $\Pi_1(p) : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$ est un isomorphisme de groupes.

Démonstration :

Comme $\Pi_1(p)$ est injectif (2.1), il suffit donc de vérifier sa surjectivité.
$\Rightarrow$: supposons que p soit un homéomorphisme. Soit $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, alors $[p^{-1} \circ \gamma] \in \pi_1(Y, y_0)$ et $\Pi_1(p)([p^{-1} \circ \gamma]) = [\gamma]$, ainsi $\Pi_1(p)$ est surjectif et est donc bien un isomorphisme.
$\Leftarrow$: supposons que $\Pi_1(p)$ soit un isomorphisme. Alors $\pi_1(Y, y_0) = \pi_1(X, x_0)$, donc d'après 2.6, $p^{-1}(x_0) \simeq \pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, x_0) = \{*\}$.
Ensuite Y est connexe car connexe par arcs et donc $X = p(Y)$ est connexe comme image d'un connexe par une application continue, on peut donc appliquer la proposition 3.5 p.5 de [1] : toutes les fibres du revêtement sont homéomorphes.
Ainsi chaque élément de X admet un unique antécédent par p, p est donc une application bijective. Ainsi p est une application bijective, continue et ouverte (car p homéomorphisme local), et est donc un homéomorphisme.

■

Corollaire 2.8

Un revêtement connexe par arcs d'un espace simplement connexe est un homéomorphisme.

Démonstration :

Soit p un tel revêtement, alors $\Pi_1(p)$ est injectif (2.1) et d'image réduite au neutre, il s'agit donc d'un isomorphisme. On peut donc appliquer la propriété précédente.

■

3 Revêtements galoisiens

3.1 Prérequis

Soient $p_1 : Y_1 \to X$ et $p_2 : Y_2 \to X$ deux revêtements de X, alors un morphisme de revêtements $\varphi : Y_1 \to Y_2$ n'est rien d'autre qu'un relèvement de p_2 à Y_1 :

$$\begin{tikzcd}
 & Y_1 \arrow[d, "p_1"] \\
Y_2 \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "p_2"'] & X
\end{tikzcd}$$

On obtient donc facilement les propositions suivantes :

Proposition 3.1

Soient $p_1 : Y_1 \to X$ et $p_2 : Y_2 \to X$ deux revêtements de X où Y_2 est un espace connexe. Soient deux morphismes de revêtements $\varphi_1, \varphi_2 : Y_2 \to Y_1$, s'il existe $y \in Y_2$ tel que $\varphi_1(y) = \varphi_2(y)$ alors $\varphi_1 = \varphi_2$.

Démonstration :

Découle du théorème d'unicité du relèvement, cf théorème 3.10 p.8 de [1].

■

Corollaire 3.2

Soit $p : Y \to X$ un revêtement d'espace total Y connexe.
Alors le groupe des automorphismes de revêtement de p agit sur Y sans point fixe.
i.e. si $\varphi \in \mathrm{Aut}(p)$ et $\varphi \neq Id$ alors φ n'a aucun point fixe.

Proposition 3.3

Soient $p_1 : Y_1 \to X$ et $p_2 : Y_2 \to X$ deux revêtements de X où Y_2 est un espace connexe et localement connexe par arcs.
Soient $y_1 \in Y_1$ et $y_2 \in Y_2$ tels que $p_1(y_1) = p_2(y_2)$.
Alors il existe un morphisme de revêtements $\varphi : Y_2 \to Y_1$ vérifiant $\varphi(y_2) = y_1$ si et seulement si $\pi_1(Y_2, y_2) \subset \pi_1(Y_1, y_1)$.
Dans ce cas φ est unique.

Démonstration :

Découle du théorème de relèvement, cf théorème 3.18 p.11 de [1].

■

Corollaire 3.4

Soient $p_1 : Y_1 \to X$ et $p_2 : Y_2 \to X$ deux revêtements de X où Y_1 et Y_2 sont deux espaces connexes et localement connexes par arcs.
Soient $y_1 \in Y_1$ et $y_2 \in Y_2$ tels que $p_1(y_1) = p_2(y_2)$.
Alors il existe un isomorphisme de revêtements $\varphi : Y_2 \to Y_1$ vérifiant $\varphi(y_2) = y_1$ si et seulement si $\pi_1(Y_2, y_2) = \pi_1(Y_1, y_1)$.
Dans ce cas φ est unique.

Démonstration :

Si un tel isomorphisme existe, alors d'après 3.3 $\pi_1(Y_2, y_2) \subset \pi_1(Y_1, y_1)$, et en considérant φ^{-1}, il vient $\pi_1(Y_1, y_1) \subset \pi_1(Y_2, y_2)$.
Réciproquement si $\pi_1(Y_2, y_2) = \pi_1(Y_1, y_1)$, il existe un morphisme de revêtements $\varphi : Y_2 \to Y_1$ vérifiant $\varphi(y_2) = y_1$ et un morphisme de revêtements $\psi : Y_1 \to Y_2$ vérifiant $\psi(y_1) = y_2$. $\varphi \circ \psi(y_1) = y_1$, d'après 3.1 $\varphi \circ \psi = Id_{Y_1}$, de même $\psi \circ \varphi = Id_{Id_2}$.
D'où la proposition.

■

Ci-dessous le cas particulier où $p_1 = p_2$:

Corollaire 3.5

Soit $p : Y \to X$ un revêtement d'espace total Y connexe et localement connexe par arcs.
Soient $x_0 \in X$ et $y_1, y_2 \in p^{-1}(x_0)$, alors il existe un automorphisme de revêtement $\varphi \in \mathrm{Aut}(p)$ vérifiant $\varphi(y_1) = y_2$ si et seulement si $\pi_1(Y, y_2) = \pi_1(Y, y_1)$.
Dans ce cas φ est unique.

Théorème 3.6

Soient $p_1 : Y_1 \to X$ et $p_2 : Y_2 \to X$ deux revêtements de X où Y_1 et Y_2 sont deux espaces connexes et localement connexes par arcs.
Les revêtements p_1 et p_2 sont isomorphes si et seulement si pour tout couple $(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$ vérifiant $p_1(y_1) = p_2(y_2)$, $\pi_1(Y_1, y_1)$ et $\pi_1(Y_2, y_2)$ sont dans la même classe de conjugaison dans $\pi_1(X, x_0)$ où $x_0 = p_1(y_1) = p_2(y_2)$.

Démonstration :

$\Rightarrow$: supposons que p_1 et p_2 soient isomorphes et soit $\varphi : Y_1 \to Y_2$ un morphisme de revêtements. Soit $(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$ vérifiant $p_1(y_1) = p_2(y_2) = x_0$, alors $p_2(\varphi(y_1)) = p_1(y_1) = x_0$. Ainsi $\varphi(y_1) \in p_2^{-1}(x_0)$, comme $y_2 \in p_2^{-1}(x_0)$, $\pi_1(Y_2, y_2)$ et $\pi_1(Y_2, \varphi(y_1))$ sont conjugués dans $\pi_1(X, x_0)$ d'après 2.3. Or $\pi_1(Y_2, \varphi(y_1)) = \pi_1(Y_1, y_1)$ d'après 3.4. Donc $\pi_1(Y_1, y_1)$ et $\pi_1(Y_2, y_2)$ sont conjugués dans $\pi_1(X, x_0)$.
$\Leftarrow$: Réciproquement, un revêtement étant surjectif, il existe un couple $(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$ vérifiant $p_1(y_1) = p_2(y_2) = x_0$, alors $\pi_1(Y_1, y_1)$ et $\pi_1(Y_2, y_2)$ sont conjugués dans $\pi_1(X, x_0)$ par hypothèse. Puis d'après la remarque suivant 2.3, il existe $y_1' \in p_1^{-1}(x_0)$ tel que $\pi_1(Y_2, y_2) = \pi_1(Y_1, y_1')$, donc d'après 3.4, p_1 et p_2 sont isomorphes.

■

Remarques :
- D'après la démonstration, pour la réciproque, il suffit en fait que ce soit vrai pour un couple (y_1, y_2).
- On déduit de ce théorème que, sous ces hypothèses, un revêtement est caractérisé à isomorphisme près par les classes de conjugaison de $\pi_1(X, x_0)$.

3.2 Définition et caractérisations

Soient $p : Y \to X$ un revêtement et $x_0 \in X$, alors Aut(p) agit naturellement à gauche sur la fibre $p^{-1}(x_0)$: $\forall f \in \mathrm{Aut}(p)$, $\forall y \in p^{-1}(x_0)$, $f \cdot y = f(y)$.
Rappelons que les éléments de Aut(p) sont les homéomorphismes $f : Y \to Y$ vérifiant $p = p \circ f$.
Remarquons de plus que l'action de monodromie (à droite) de $\pi_1(X, x_0)$ sur la fibre $p^{-1}(x_0)$ et l'action (à gauche) de $\mathrm{Aut}(p)$ sur la fibre $p^{-1}(x_0)$ commutent :
soient $f \in \mathrm{Aut}(p)$, $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ et $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ alors comme $p = p \circ f$, $f \circ \tilde{\gamma_{y_0}}$ est le relèvement de γ d'origine $f(y_0)$ et donc $f \cdot (y_0 \cdot [\gamma]) = f(y_0 \cdot [\gamma]) = f(\tilde{\gamma}_{y_0}(1)) = f \circ \tilde{\gamma_{y_0}}(1) = \gamma_{\tilde{f(y_0)}} = f(y_0) \cdot [\gamma] = (f \cdot y_0) \cdot [\gamma]$.

Définition 3.7 : revêtement galoisien

Un revêtement $p : Y \to X$ est dit *galoisien* si son groupe d'automorphismes agit transitivement sur les fibres.
i.e. si pour tout $x \in X$, l'action de $\mathrm{Aut}(p)$ sur $p^{-1}(x)$ est transitive.
Dans ce cas $\mathrm{Aut}(p)$ s'appelle le *groupe de Galois de p*.

Remarque : si X est connexe, il suffit que ce soit vrai pour une fibre : en effet, d'après la proposition 3.5 p.5 de [1], nous avons vu que lorsque l'espace de base est connexe, toutes les fibres sont homéomorphes.

Rappelons la définition du produit cartésien dans une catégorie $\mathcal{C}$: soient $f_1 : X_1 \to X$ et $f_2 : X_2 \to X$ deux morphismes de $\mathcal{C}$, le produit cartésien de (f_1, f_2) (unique à isomorphisme près) est le triplet $(Z, p_1 : Z \to X_1, Z \to X_2)$ tel que
$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\ X_2 \arrow[r, "f_2"'] & X \end{tikzcd}$$
soit un carré cartésien.

On le note $X_1 \underset{X}{\times} X_2$.
Dans $\mathcal{R}ev(X)$ (tout comme dans $\mathcal{S}et$), le produit cartésien de deux morphismes $f_1 : Y_1 \to Y$ et $f_2 : Y_2 \to Y$ est donné par $Y_1 \underset{Y}{\times} Y_2 = \{(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2,\ f_1(y_1) = f_2(y_2)\}$ et les deux projections canoniques.
Nous avons vu à la proposition 3.6 p.6 de [1] qu'il s'agit d'un revêtement pour la première projection, et ici par symétrie aussi pour la seconde projection (ces deux revêtements sont d'ailleurs isomorphes).

Caractérisation 3.8

Soit $p : Y \to X$ un revêtement d'espace total Y connexe.
Le revêtement p est galoisien si et seulement s'il se trivialise lui-même, i.e. si $pr_1 : Y \underset{X}{\times} Y \to Y$ est un revêtement trivial (on peut choisir l'une des deux projections car ces deux revêtements sont isomorphes).

Démonstration :

$\Rightarrow$:

Lemme

Si pr_1 est trivial alors $\forall (y, y') \in Y \underset{X}{\times} Y$, il existe un morphisme de revêtement $f : Y \to Y$ tel que $f(y) = y'$.
(La réciproque est aussi vraie, ce lemme découle du fait qu'un revêtement est trivial si et seulement si pour tout point de l'espace total passe une section continue, dont la réciproque est assez difficile à démontrer)

Soit $\Phi : Y \underset{X}{\times} Y \to Y \times F$ une trivialisation.
Alors $\forall (y, y') \in Y \underset{X}{\times} Y$, $\exists ! \lambda \in F$, $\Phi(y, y') = (y, \lambda)$. Posons alors $s : \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Y \times F \\ y & \longmapsto & (y, \lambda) \end{array}$ de sorte à ce que $f = pr_2 \circ \Phi^{-1} \circ s$ convienne.

$$\begin{tikzcd} Y \underset{X}{\times} Y \arrow[r, "\Phi", "\simeq"'] \arrow[d, "pr_1"'] & Y \times F \arrow[dl] \\ Y \arrow[ur, dashed, bend right, "s"'] & \end{tikzcd}$$

■

Grâce à ce lemme, $\forall (y, y') \in Y \underset{X}{\times} Y$, il existe des morphismes de revêtement $f : Y \to Y$ et $f' : Y \to Y$ tels que $f(y) = y'$ et $f'(y') = y$.
Alors $f' \circ f(y) = y = Id_Y(y)$, donc par unicité du relèvement (prop 3.10 p8 de [1] car Y est connexe), $f' \circ f = Id_Y$ et de même $f \circ f' = Id_Y$. Donc $f \in \mathrm{Aut}(p)$.
$\Leftarrow$: **TODO**

■

Avec des hypothèses supplémentaires sur l'espace de base et l'espace total, nous obtenons les caractérisations suivantes :

Caractérisation 3.9

Soient $p : Y \to X$ un revêtement d'espace total Y connexe et localement connexe par arcs, $x_0 \in X$ et $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :
(1) Le revêtement p est galoisien.
(2) Pour tout $y, y' \in p^{-1}(x_0)$, $\pi_1(Y, y) = \pi_1(Y, y')$.
(3) Le normalisateur de $\pi_1(Y, y_0)$ dans $\pi_1(X, x_0)$ est $\pi_1(X, x_0)$, i.e. $\pi_1(Y, y_0)$ est distingué dans $\pi_1(X, x_0)$.
(4) Pour tout lacet de X en x_0, soit tout relèvement est un lacet, soit aucun relèvement ne l'est.

Le normalisateur est défini en 4.1 et caractérisé en 4.2.

Démonstration :

(1) $\Leftrightarrow$ (2) d'après 3.5.
(2) $\Leftrightarrow$ (3) car un sous-groupe est distingué si et seulement si tous ses conjugués coïncident (on a vu en remarque de 2.3 que les $\pi_1(Y, y)$, $y \in p^{-1}(x_0)$ forment une classe de conjugaison dans $\pi_1(X, x_0)$, on rappelle que Y est connexe par arcs car connexe et localement connexe par arcs).

(1) $\Rightarrow$ (4) soient α un lacet en x_0 de X et $\tilde{\alpha}_y$ et $\tilde{\alpha}_{y'}$ deux relèvements de α d'origines respectives y et y' dans $p^{-1}(x_0)$. D'après le premier point il existe un automorphisme de revêtement $\varphi : Y \to Y$ tel que $\varphi(y) = y'$. Alors $p \circ \varphi \circ \tilde{\alpha}_y = p \circ \tilde{\alpha}_y = \alpha$, donc $\varphi \circ \tilde{\alpha}_y$ est un relèvement de α d'origine y', par unicité du relèvement $\alpha_{y'} = \varphi \circ \alpha_y$. Ce qui permet de conclure.
(4) $\Rightarrow$ (2) soient $y, y' \in p^{-1}(x_0)$, soit γ un lacet en y dans Y, alors γ est un relèvement de $p \circ \gamma$ qui est un lacet, donc le relèvement δ de $p \circ \gamma$ d'origine y' est aussi un lacet et $[p \circ \gamma] = [p \circ \delta]$. On a donc montré que $\pi_1(Y, y) \subset \pi_1(Y, y')$. En inversant les rôles on obtient l'égalité.

■

4 La correspondance de Galois des revêtements

4.1 Structure du groupe de galois $\mathrm{Aut}(p)$

Définition 4.1 : normalisateur d'un sous-groupe

Soit H un sous-groupe d'un groupe G. On définit le normalisateur $N(H)$ de H dans G comme le plus grand sous-groupe de G dans lequel H est normal (ou distingué).

Proposition 4.2

Soit H un sous-groupe d'un groupe G.
Le normalisateur de H dans G est donné par $N(H) = \{g \in G,\ g^{-1}Hg = H\}$.

Démonstration :

On vérifie aisément que $N(H)$ est un sous-groupe de G.
Par construction, H est normal dans $N(H)$.
Soit K un sous-groupe de G dans lequel H est normal, alors pour tout $g \in K$, $g^{-1}Hg = H$, donc $K \subset \{g \in G,\ g^{-1}Hg = H\}$.

■

Proposition 4.3

Soit G un groupe opérant transitivement à droite sur un ensemble E.
Soient $x_0 \in E$ et G_{x_0} son stabilisateur.
Alors le groupe des bijections de E $G-$équivariantes $\mathrm{Aut}_G(E)$ et le groupe $N(G_{x_0})/G_{x_0}$ sont isomorphes.

Démonstration :

Soit $S = \{x \in E,\ G_x = G_{x_0}\}$ l'ensemble des points de E ayant le même stabilisateur que x_0.
Lemme 1 : montrons que $\mathrm{Aut}_G(E)$ agit simplement transitivement à gauche sur S.
On définit l'action par $\forall \varphi \in \mathrm{Aut}_G(E)$, $\forall x \in S$, $\varphi \cdot x = \varphi(x)$. On vérifie aisément qu'il s'agit bien d'une action de groupe à gauche.
Vérifions qu'elle est libre : soient $\varphi \in \mathrm{Aut}_G(E)$ et $x \in S$ tels que $\varphi \cdot x = x$ alors $\varphi(x) = \varphi \cdot x = x = Id(x)$, donc $\varphi = Id$ d'après 1.23.
Vérifions qu'elle est transitive : soient $x, y \in S$. On cherche à construire une bijection φ de E $G-$équivariante vérifiant $\varphi(x) = y$.

On suppose qu'une telle application φ existe. Soit $z \in E$, G agissant transitivement sur E, il existe $g \in G$ tel que $z = x \cdot g$, on a alors par $G-$équivariance $\varphi(z) = \varphi(x \cdot g) = \varphi(x) \cdot g = y \cdot g$.
Montrons désormais que $\varphi : z = x \cdot g \mapsto y \cdot g$ est bien définie, qu'elle vérifie $\varphi(x) = y$, qu'elle est $G-$équivariante et enfin qu'elle est bijective.
• Si $x \cdot g = x \cdot g'$, alors $x \cdot (gg'^{-1}) = x \Rightarrow gg'^{-1} \in G_x = G_{x_0} = G_y$, ainsi $y \cdot (gg'^{-1}) = y \Rightarrow y \cdot g = y \cdot g'$. Donc φ est bien définie.
• $\varphi(x) = \varphi(x \cdot e) = y \cdot e = y$.
• Soient $z \in E$ et $h \in G$, alors il existe $g \in G$ tel que $z = x \cdot g$ et $\varphi(z \cdot h) = \varphi(z \cdot (gh)) = y \cdot (gh) = (y \cdot g) \cdot h = \varphi(z) \cdot h$. Donc φ est $G-$équivariante.
• Si on construit de la même façon une application ψ $G-$équivariante vérifiant cette fois $\psi(y) = x$, on remarque que $\psi = \varphi^{-1}$, φ est donc bijective. ■

Lemme 2 : soient $x \in S$ et $g \in G$. Montrons que $x \cdot g \in S \Leftrightarrow g \in N(G_{x_0})$.
On a, par définition de S, $x \cdot g \in S \Leftrightarrow \{h \in G, \ (x \cdot g) \cdot h = x \cdot g\} = G_{x_0}$.
Or, pour $h \in G$, $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot g \Leftrightarrow x \cdot (ghg^{-1}) = x \Leftrightarrow ghg^{-1} \in G_{x_0} \Leftrightarrow h \in g^{-1}G_{x_0}g$.
Donc $x \cdot g \in S \Leftrightarrow g^{-1}G_{x_0}g = G_{x_0} \Leftrightarrow g \in N(G_{x_0})$. ■

On déduit de ce dernier lemme qu'en restreignant l'action de G sur E à $N(G_{x_0})$, on obtient une action à droite transitive de $N(G_{x_0})$ sur S. On vérifie que le noyau de cette action est G_{x_0}, ainsi d'après 1.17 $N(G_{x_0})/G_{x_0}$ agit transitivement et fidèlement à droite sur S.
On vérifie que cette action est libre : soient $x \in S$ et $\overline{g} \in N(G_{x_0})/G_{x_0}$ tels que $x \cdot \overline{g} = x$ alors $x \cdot g = x \cdot \overline{g} = x \Rightarrow g \in G_x = G_{x_0} \Rightarrow \overline{g} = \overline{e}$. Ainsi cette action est libre et transitive, donc simplement transitive.

Nous pouvons maintenant construire un isomorphisme $\alpha : \mathrm{Aut}_G(E) \to N(G_{x_0})/G_{x_0}$:
Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}_G(E)$, alors il existe un unique $h \in N(G_{x_0})/G_{x_0}$ tel que $x_0 \cdot h = \varphi(x_0)$ (car l'action est simplement transitive).
Réciproquement, pour tout $h \in N(G_{x_0})/G_{x_0}$, il existe un unique $\varphi \in \mathrm{Aut}_G(E)$ tel que $\varphi(x_0) = x_0 \cdot h$ ($\mathrm{Aut}_G(E)$ agit de façon simplement transitive d'après le premier lemme).
Nous avons donc une correspondance biunivoque $\varphi \leftrightarrow h$ qui permet de définir la bijection α. Il reste à vérifier qu'il s'agit bien d'un morphisme de groupes : si $\varphi(x_0) = x_0 \cdot h$ et $\psi(x_0) = x_0 \cdot k$ alors $\varphi \circ \psi(x_0) = \varphi(x_0 \cdot k) = \varphi(x_0) \cdot k = (x_0 \cdot h) \cdot k = x_0 \cdot (hk)$.
Donc si $\alpha(\varphi) = h$ et $\alpha(\psi) = k$ alors $\alpha(\varphi \circ \psi) = hk = \alpha(\varphi)\alpha(\psi)$.

■

Proposition 4.4

Soient $p : Y \to X$ un revêtement connexe par arcs d'un espace connexe par arcs et localement connexe, $x_0 \in X$ et $y_0 \in p^{-1}(x_0)$.
Notons N le normalisateur de $\pi_1(Y, y_0)$ dans $\pi_1(X, x_0)$.
On a alors un isomorphisme de groupes $N/\pi_1(Y, y_0) \simeq \mathrm{Aut}(p)$.

On remarquera qu'un espace connexe et localement connexe par arcs est localement connexe et connexe par arcs.

Démonstration :

L'espace de base X est localement connexe, on peut ainsi appliquer la proposition 4.9 p.15 de [1] qui nous donne la relation d'équipotence $\mathrm{Aut}_{\mathcal{R}ev(X)}(p) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathcal{R}ep(\Pi_1(X), \mathcal{E}ns)}(\mu_p)$.
Ensuite X étant connexe par arcs, $\Pi_1(X)$ est équivalent à $\underline{\pi_1(X, x_0)}$ (le groupoïde à un seul objet dont les endomorphismes sont les éléments de $\pi_1(X, x_0)$). Ainsi $\mathrm{Aut}_{\mathcal{R}ep(\Pi_1(X), \mathcal{E}ns)}(\mu_p) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathcal{R}ep(\underline{\pi_1(X,x_0)}, \mathcal{E}ns)}(\mu_p) \simeq \mathrm{Aut}_{\pi_1(X,x_0)}(p^{-1}(x_0))$.

Voir l'annexe A pour plus de détails sur cette démonstration.

Éclaircissons un peu toutes ces notations obscures : μ_p désigne ici la représentation de monodromie de p construite dans [1] et $\mathrm{Aut}_{\pi_1(X,x_0)}(p^{-1}(x_0))$ est le groupe des bijections de $p^{-1}(x_0)$ $\pi_1(X, x_0)-$équivariantes pour l'action de monodromie. La dernière relation d'équipotence découle du fait qu'une action de groupe (i.e. un morphisme $G \to \mathrm{Aut}(S)$) n'est rien d'autre qu'un foncteur $f : \underline{G} \to \mathcal{E}ns$ tel que $f(*) = S$ et qu'une application $G-$équivariante n'est rien d'autre qu'un morphisme de foncteurs.
On obtient donc $\mathrm{Aut}_{\mathcal{R}ev(X)}(p) \simeq \mathrm{Aut}_{\pi_1(X,x_0)}(p^{-1}(x_0))$.

On aurait directement pu montrer cette relation sans passer par les catégories, cependant il s'agit d'un travail fastidieux qui n'était pas ici nécessaire sachant que l'on avait déjà la proposition 4.9 p.15 de [1].

Enfin, d'après 4.3 (l'action de monodromie est transitive d'après 2.3 car Y est connexe par arcs), $\mathrm{Aut}_{\pi_1(X,x_0)}(p^{-1}(x_0)) \simeq N/\pi_1(Y,y_0)$.

■

Corollaire 4.5

Soient $p : Y \to X$ un revêtement galoisien d'espace total Y connexe et localement connexe par arcs et d'espace de base X connexe par arcs et localement connexe, $x_0 \in X$ et $y_0 \in p^{-1}(x_0)$.
Alors $\pi_1(X,x_0)/\pi_1(Y,y_0) \simeq \mathrm{Aut}(p)$.

Démonstration :

Découle de 4.4 en remarquant que $N(\pi_1(Y,y_0)) = \pi_1(X,x_0)$ d'après 3.9.

■

4.2 Lien avec les revêtements universels

Sous certaines hypothèses, un espace topologique X admet un revêtement connexe qui se distingue des autres au sens où les autres en sont des quotients (c'est donc un revêtement connexe « plus grand » que les autres) : il s'agit de celui qui est simplement connexe. On parle alors de *revêtement universel* de X.
L'intérêt de ce revêtement universel est de pouvoir réaliser une identification $\pi_1(X,x) \simeq \mathrm{Aut}(p)$. Suite à quoi on peut voir que tout revêtement connexe de X est un quotient du revêtement universel.
Tout d'abord quelques rappels de [1] (§4.2) :

Définition 4.6 : revêtement pointé universel

Soit (X,x_0) un espace pointé connexe et localement connexe par arcs.
On appelle *revêtement pointé universel* de (X,x_0) tout revêtement pointé $p : (Y,y_0) \to (X,x_0)$ d'espace total Y connexe vérifiant la propriété universelle suivante :
$\forall q : Z \to X$ revêtement d'espace total Z connexe, $\forall z \in q^{-1}(x_0)$, $\exists f : Y \to Z$ morphisme de revêtements tel que $f(y_0) = z$.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[r, "q"'] & X \end{tikzcd}$$

Remarques :
- Il découle de l'unicité du relèvement que f est unique.
- On peut montrer que f est un revêtement, on peut donc le voir comme un revêtement intermédiaire.

Proposition 4.7

Deux revêtements pointés universels de X sont isomorphes et cet isomorphisme est unique.

Définition 4.8

On dira que $p : Y \to X$ est un revêtement universel s'il existe $x_0 \in X$ et $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ tels que $p : (Y,y_0) \to (X,x_0)$.
Deux revêtements universels de X sont encore isomorphes, mais plus forcément de manière unique.

Remarque : deux revêtements universels de X étant isomorphes, on parle généralement *du* revêtement universel de X.

Proposition 4.9

Soit X un espace topologique connexe et localement connexe par arcs.
Tout revêtement $p : Y \to X$ d'espace total Y simplement connexe est universel.

Définition 4.10 : espace localement semi-1-connexe

Un espace X est dit *localement semi-1-connexe* s'il est connexe et localement connexe par arcs et s'il admet un recouvrement par des ouverts semi-1-connexes (un ouvert U de X est dit semi-1-connexe si tout lacet de U d'origine x est homotope sur X au chemin constant en x).

Enfin, le théorème 4.20 de [1] :

Théorème 4.11

Tout espace localement semi-1-connexe admet un revêtement simplement connexe (donc un revêtement universel).

Proposition 4.12

Soient $p : Y \to X$ un revêtement universel de X et $x_0 \in X$.
Alors $\text{Aut}(p)$ agit simplement transitivement sur $p^{-1}(x_0)$.

Démonstration :

Pour tout $x_0 \in X$, si $y_1, y_2 \in p^{-1}(x_0)$, d'après la propriété universelle, il existe un unique morphisme de revêtement $f_{y_1,y_2} : Y \to Y$ tel que $f(y_1) = y_2$.
Ce morphisme est en fait un isomorphisme de revêtements d'inverse f_{y_2,y_1} : $f_{y_2,y_1} \circ f_{y_1,y_2}(y_1) = y_1 = Id_Y(y_1)$, par unicité du relèvement (prop 3.10 p8 de [1], Y est connexe), $f_{y_2,y_1} \circ f_{y_1,y_2} = Id_Y$ et de même $f_{y_1,y_2} \circ f_{y_2,y_1} = Id_Y$.
Ainsi $\text{Aut}(p)$ agit simplement transitivement sur $p^{-1}(x_0)$.

■

Corollaire 4.13

Tout revêtement universel de X localement connexe par arcs est galoisien.

Démonstration :

Découle de la proposition précédente et de 3.9 (Y est connexe par définition d'un revêtement universel et localement connexe par arcs car p est un homéomorphisme local).

■

Proposition 4.14

Soient $p : Y \to X$ un revêtement universel de X et $x_0 \in X$.
Alors les groupes $\pi_1(X, x_0)$ et $\text{Aut}(p)$ sont isomorphes.

Démonstration :

Soit $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ (on rappelle que p est surjective).
D'après 4.12, on peut définir la bijection $\pi_1(X, x_0) \to \mathrm{Aut(p)}$ qui à $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ associe l'unique $f \in \mathrm{Aut}(p)$ tel que $f(y_0) = y_0 \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}_{y_0}(1)$.
L'action de monodromie et l'action de $\mathrm{Aut}(p)$ sur $p^{-1}(x_0)$ commutant, il s'agit d'un morphisme de groupes, donc d'un isomorphisme de groupes.

■

4.3 Le cas des revêtements connexes galoisiens

Soient X un espace localement semi-1-connexe et $x_0 \in X$.
Considérons $\mathcal{K}$ l'ensemble des revêtements galoisiens connexes de X. On peut munir $\mathcal{K}$ de la relation d'équivalence « être isomorphe » et en quotientant $\mathcal{K}$ par cette relation d'équivalence on obtient $\mathcal{L}$ l'ensemble des classes d'isomorphie des revêtements galoisiens connexes de X.
Posons maintenant $\mathcal{H}$ l'ensemble des sous-groupes distingués de $\pi_1(X, x_0)$.
L'application $\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ p : Y \to X & \longmapsto & \pi_1(Y, y)),\ y \in p^{-1}(x_0) \end{array}$ est bien définie : d'après 3.9 $\pi_1(Y, y)$ est indépendant du choix de y dans $p^{-1}(x_0)$ et est bien distingué (Y est connexe mais aussi localement connexe par arcs car p est un homéomorphisme local).
Montrons que Ψ est surjective :

Tout d'abord remarquons que comme X est connexe par arcs, $\Pi_1(X)$ est équivalent à $\underline{\pi_1(X, x_0)}$ (le groupoïde à un seul objet dont les endomorphismes sont les éléments de $\pi_1(X, x_0)$, voir l'annexe A), ainsi X étant aussi localement semi-1-connexe, d'après [1], on a l'équivalence entre les catégories $\mathcal{R}ev(X)$ et $\mathcal{R}ep(\underline{\pi_1(X, x_0)}, \mathcal{E}ns)$.

Soit H un sous-groupe distingué de $\pi_1(X, x_0)$. On a une action transitive de $\pi_1(X, x_0)$ sur $\pi_1(X, x_0)/H$ dont le stabilisateur de $eH = H$ est H ($[\gamma] \cdot [\delta]H = ([\gamma][\delta])H$). Le morphisme structurel de cette action n'est rien d'autre qu'une représentation de $\mathcal{R}ep(\underline{\pi_1(X, x_0)}, \mathcal{E}ns)$ (cf annexe A pour plus de détails). Ainsi d'après l'équivalence de catégories (l'essentielle surjectivité en fait) il existe un revêtement $p : Y \to X$ ayant l'action définie ci-dessus comme action de monodromie.
L'action de monodromie de p est transitive par construction, donc Y est connexe (car connexe par arcs) d'après 2.5.
Toujours par construction de p, il existe $y \in p^{-1}(x_0)$ ayant H pour stabilisateur par l'action de monodromie. Le sous-groupe H étant distingué, on déduit de 3.9 que p est galoisien.
Et on a bien, encore et toujours par construction, $\Psi(p) = H$. D'où la surjectivité.

■

Il découle de 3.4 que $\Psi(p_1) = \Psi(p_2)$ si et seulement si p_1 et p_2 sont isomorphes, ainsi, en passant au quotient, Ψ induit une bijection entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{H}$ (voir le lemme 4.25 p22 de [1] pour plus de détails).

4.4 Le cas des revêtements connexes pointés

Soient X un espace localement semi-1-connexe et $x_0 \in X$.
Nous souhaitons généraliser le théorème précédent, mais cette fois en ne considérant plus les revêtements galoisiens (et donc en s'intéressant à tous les sous-groupes de $\pi_1(X, x_0)$ et non seulement les distingués). Cependant, dans ce cas Ψ n'est plus bien définie car $\pi_1(Y, y)$ dépend du choix de y dans $p^{-1}(x_0)$, nous devons donc considérer des revêtements pointés.
Considérons $\mathcal{K}'$ l'ensemble des revêtements connexes pointés de X et $\mathcal{L}'$ l'ensemble de ses classes d'isomorphie. Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des sous-groupes de $\pi_1(X, x_0)$.
L'application $\Psi' : \begin{array}{ccc} \mathcal{K}' & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ p : (Y, y_0) \to (X, x_0) & \longmapsto & \pi_1(Y, y_0)) \end{array}$ est bien définie. De la même façon que précédemment, on montre que Ψ' induit une bijection $\tilde{\Psi}'$ entre $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{G}$.

Remarque : si l'on souhaite se passer des points de base, on peut obtenir de la même façon une bijection entre l'ensemble des revêtements connexes de X et l'ensemble des classes de conjugaison des sous-groupes de $\pi_1(X, x_0)$ à l'aide de 3.6.

Le fait que pour le revêtement universel $\pi_1(Y, y_0) = \{e\}$ signifie que son action de monodromie s'identifie à l'action triviale de $\pi_1(X, x_0)$ sur lui-même (cf la démonstration de la surjectivité de Ψ).

On rappelle que d'après 4.11, X admet un revêtement universel. On remarque alors que dans la correspondance ci-dessus, un revêtement universel est associé au sous-groupe trivial $\{e\}$, en effet d'après 4.14, 4.13 et 4.5, $\pi_1(X, x_0) \simeq \mathrm{Aut}(p) \simeq \pi_1(X, x_0)/\pi_1(Y, y_0)$ (pour les hypothèses, on rappelle que p est un homéomorphisme local et conserve donc les propriétés topologiques locales dans les deux sens).
Ce fait montre la place privilégiée des revêtements universels de X parmi les revêtements connexes, ce fait est plus détaillé dans l'annexe C.

Nous avons démontré la proposition suivante :

Théorème 4.15 : correspondance de Galois des revêtements connexes

L'ensemble des classes d'isomorphie des revêtements connexes pointés d'un espace X localement semi-1-connexe est en bijection avec les sous-groupes du groupe fondamental de X.
Par cette correspondance les classes d'isomorphie des revêtements galoisiens connexes de X s'identifient aux sous-groupes distingués du groupe fondamental de X.
La classe du revêtement universel s'identifie au sous-groupe trivial.

Cet énoncé est à rapprocher de son équivalent en ce qui concerne les extensions algébriques d'un corps de caractéristique nulle.

A Représentations (catégories)

En cours de rédaction...

B Une version catégorique du théorème de relèvement pour les revêtements galoisiens

En cours de rédaction...

C Un ordre partiel sur $\mathcal{L}'$ compatible avec $\tilde{\Psi}'$

C.1 Prérequis sur la topologie quotient

Ces quelques notes sur la topologie quotient ne se veulent pas exhaustives, il s'agit simplement de donner les résultats qui nous seront nécessaires.

Définition C.1 : topologie quotient

Soient E un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.
On nomme *topologie quotient* la topologie la plus fine sur $E/\mathcal{R}$ telle que la projection $pr : E \to E/\mathcal{R}$ soit continue.

On montre aisément que :

Proposition C.2

Soient E un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.
Les ouverts de la topologie quotient sont les parties U de $E/\mathcal{R}$ telle que $pr^{-1}(U)$ soit un ouvert de E.

L'interêt de cette définition réside dans le fait qu'elle permet d'obtenir la propriété universelle suivante :

Proposition C.3

Soient E et F deux espaces topologiques et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.
Une application $f : E/\mathcal{R} \to F$ est continue si et seulement si $f \circ pr : X \to Y$ est continue.

Démonstration :

$\Rightarrow$: immédiat car la composée de deux applications continues est continue.
$\Leftarrow$: supposons que $f \circ pr$ soit continue, soit U un ouvert de F, alors $pr^{-1}(f^{-1}(V)) = (f \circ pr)^{-1}(V)$ est un ouvert de E, donc $f^{-1}(V)$ est un ouvert de $E/\mathcal{R}$.

■

Remarque : l'inconvénient de cette définition est que $E/\mathcal{R}$ ne conserve pas forcément la séparation : la projection pr n'est pas nécessairement ouverte et si U et V sont deux ouverts disjoints de E, leurs images par pr ne le sont pas forcément.

Définition C.4 : relation ouverte

Soient E un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.
La relation $\mathcal{R}$ est dite ouverte si pour tout ouvert U de E, $pr^{-1}(pr(U))$ est ouvert.

Proposition C.5

Soient E un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.
Si $\mathcal{R}$ est ouverte et si son graphe $\mathcal{G} = \{(x, y) \in E \times E,\ x\mathcal{R}y\}$ est un sous-espace fermé de $E \times E$, alors la topologie quotient est séparée.

Démonstration :

Soient $\overline{x}$ et $\overline{y}$ deux éléments distincts de $E/\mathcal{R}$, alors les représentants x et y ne sont pas en relation, i.e. $(x, y) \notin \mathcal{G}$. Comme $\mathcal{G}$ est fermé, son complémentaire dans $E \times E$ est ouvert, donc il existe un voisinage de (x, y) ne rencontrant pas $\mathcal{G}$, il existe donc un ouvert U contenant x et un ouvert V contenant y de sorte à ce que $(U \times V) \cap \mathcal{G} = \varnothing$.
La relation $\mathcal{R}$ étant ouverte, la projection $pr : E \to E/\mathcal{G}$ l'est aussi. Donc $pr(U)$ et $pr(V)$ sont deux ouverts voisinages respectivement de $\overline{x}$ et de $\overline{y}$.
Enfin, ces voisinages sont forcément disjoints, sinon il existerait $(z, t) \in U \times V$ tel que $pr(z) = pr(t)$, donc $z\mathcal{R}t$ (i.e. $(z, t) \in \mathcal{G}$), et ainsi $(U \times V) \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$, ce qui est absurde.

■

C.2 Actions continues de groupes topologiques

Ci-dessous quelques mots sur les actions continues (cette section n'est vraiment pas exhaustive, on peut dire beaucoup de choses sur les actions continues).

Définition C.6 : groupe topologique

Un groupe G est dit topologique s'il est muni d'une topologie compatible avec la structure de groupe,
i.e. si $\begin{array}{ccc} G\times G & \longrightarrow & G \\ (g,h) & \longmapsto & gh \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$ sont continues.

Caractérisation C.7

Un groupe G est topologique si et seulement si $\begin{array}{ccc} G\times G & \longrightarrow & G \\ (g,h) & \longmapsto & gh^{-1} \end{array}$ est continue.

Exemple trivial : tout groupe est topologique pour la topologie discrète, on parle alors de *groupe discret*.
Remarques :

1. Dans un groupe topologique G les translations $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & xa \end{array}$ sont des homéomorphismes.
2. En particulier si U est un ouvert de G et A une partie quelconque alors $UA = \bigcup_{a\in A} Ua$ et AU sont des ouverts.
3. La topologie d'un groupe topologique est caractérisée par la donnée des voisinages du neutre e. Par exemple un groupe topologique G est séparé si et seulement si $\{e\}$ est fermé dans G ou encore G est séparé si et seulement si l'intersection des voisinages de e est réduite à $\{e\}$. Je vous renvoie à la littérature mathématique pour plus de détails.

Définition C.8 : morphisme de groupes topologiques

Un morphisme de groupes topologiques est un morphisme de groupes continu.

Munis de la loi de composition usuelle des applications, on construit ainsi la catégorie des groupes topologiques.
Un isomorphisme de groupes topologiques est alors un isomorphisme de groupes qui est un homéomorphisme.

Définition C.9 : action continue

On dit qu'un groupe topologique G *agit* (ou *opère*) *continûment* sur un espace topologique X si $\begin{array}{ccc} G\times X & \longrightarrow & X \\ (g,x) & \longmapsto & g\cdot x \end{array}$ est continue.

Remarque : l'ensemble des orbites d'une action continue peut être muni de la topologie quotient, on parle alors de *l'espace des orbites*, on le note X/G.

Définition C.10 : action continue propre

Soient G un groupe topologique séparé et X un espace topologique séparé.
On dit que G agit proprement sur X si l'application graphe **gr** : $\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \times X \\ (g,x) & \longmapsto & (x, g\cdot x) \end{array}$ (qui est continue) est propre (i.e. fermée et dont les images réciproques de points sont compactes).
Lorsque G est discret, une action continue propre de G sur X est aussi appelée *proprement discontinue.*

Proposition C.11

Soient X un espace localement compact et G un groupe séparé, une action continue de G sur X est propre si et seulement si pour tout compact K de X, la partie $\{g \in G,\, K \cap gK \neq \varnothing\}$ est compacte dans G.

Remarque : Ainsi, une action continue d'un groupe discret sur un espace localement compact est proprement discontinue si et seulement si pour tout compact K de X, la partie $\{g \in G,\, K \cap gK \neq \varnothing\}$ est finie.
Démonstration :

TODO

■

Proposition C.12

Soient G un groupe topologique et X un espace topologique.
La relation « être dans la même orbite » est ouverte.

Démonstration :

Soit U un ouvert de E, $pr^{-1}(pr(U)) = \bigcup_{g\in G} g\cdot U$.
Soit g dans G, alors φ_g : $\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & g\cdot x \end{array}$ est continue d'après la définition C.9 d'inverse $\varphi_{g^{-1}}$ tout aussi continue, il s'agit donc d'un homéomorphisme. Ainsi $g\cdot U = \varphi_g(U)$ est ouvert, et donc $pr^{-1}(pr(U))$ est ouvert comme réunion d'ouverts.

■

Remarque : on déduit de cette démonstration, que dans le cas de la relation « être dans la même orbite » d'une action de groupe topologique, la projection $pr : X \to X/G$ est ouverte.

Proposition C.13

Soient G un groupe topologique séparé et X un espace topologique séparé.
Si G agit proprement sur X alors les orbites sont fermées et l'espace des orbites X/G est séparé.

Démonstration :

D'après la proposition précédente, la relation « être dans la même orbite » est ouverte et comme l'application **gr** est fermée, son image, qui n'est rien d'autre que le graphe de la relation « être dans la même orbite » est fermée.
Ainsi d'après C.5, X/G est séparé.
Ensuite, les orbites sont les images réciproques par pr (continue) des singletons (qui sont fermés car X/G est séparé), et sont donc fermées.

■

Théorème C.14

Soit G un groupe discret agissant continûment librement et proprement sur un espace topologique séparé X. Alors :
(1) pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x tel que pour tout $g \in G \backslash \{e\}$, $g \cdot V \cap V = \varnothing$.
(2) Chaque orbite de G est discrète.
(3) La projection $pr : X \to X/G$ est un revêtement.

Démonstration :

(1) L'application **gr** est continue, injective et fermée, il s'agit donc d'un homéomorphisme sur son image. Ainsi, comme $\{e\} \times X$ est un ouvert de $G \times X$, la diagonale $\Delta = \mathbf{gr}(\{e\} \times X) = \{(x,x) \in X \times X\}$ est un ouvert de $\mathrm{im}(\mathbf{gr})$. Pour tout $x \in X$, il existe donc un voisinage V de x dans X tel que $(V \times V) \subset \mathrm{im}(\mathbf{gr}) \subset \Delta$.
Donc soit $V \cap g \cdot V$ est vide, soit pour $x = g \cdot y \in V \cap g \cdot V$, $\mathbf{gr}(g,y) = (y, g \cdot y) = (y,x) \in V \times V$, donc $(y,x) \in \mathrm{im}(\mathbf{gr}) \cap V \times V \subset \Delta \Rightarrow y = x = g \cdot y \Rightarrow g = e$ car l'action est libre.
(2) Soit $x \in X$, montrons que l'orbite $G \cdot x$ est discrète. Soit V un voisinage de x comme construit en (1), alors soit $y = g \cdot x \in (G \cdot x) \cap V$, alors $y \in V \cap g \cdot V$, donc $g = e$ et $y = x$. Ainsi $(G \cdot x) \cap V = \{x\}$. Si on se donne U un ouvert inclus dans V contenant x, $(G \cdot x) \cap U \subset (G \cdot x) \cap V \subset \{x\}$, donc $\{x\} = (G \cdot x) \cap U$ et est donc un ouvert de $G \cdot x$.
(3) Nous allons utiliser la troisième caractérisation de [1] 3.4p4. Soit x dans X et V un voisinage de x comme construit en (1), il existe alors un ouvert U contenant x et inclus dans V et vérifiant donc $\forall g \in G \setminus \{e\}, U \cap g \cdot U = \varnothing$. La projection pr étant ouverte (remarque suivant C.12), $W = pr(U)$ est ouvert. Nous avons aussi $pr^{-1}(W) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$.
Il s'agit d'une union d'ouverts non-vides d'après la démonstration de C.12, montrons que cette union est disjointe : soit $y \in g \cdot U \cap g' \cdot U$, alors $g^{-1} \cdot y \in U \cap (g^{-1}g')U$ et donc $g^{-1}g' = e \Rightarrow g = g'$ par la construction de U.
Il reste à vérifier que pour tout $g \in G$, $pr_{|g \cdot U} : g \cdot U \to W$ est un homéomorphisme. Nous avons déjà que $pr_{|g \cdot U}$ est continue et ouverte, et elle est clairement surjective. Il suffit donc de montrer son injectivité : soient $x, x' \in g \cdot U$ vérifiant $pr(x) = pr(x')$, il existe alors $g' \in G$ tel que $x = g' \cdot x'$ donc $x \in g \cdot U \cap (g'g) \cdot U$ et ainsi $g' = e$ par construction de U, d'où $x = x'$.

■

C.3 Construction de l'ordre

Nous avons vu la place privilégiée du revêtement universel d'un espace X localement semi-1-connexe, il s'agit de la classe d'isomorphie associée au sous-groupe trivial de $\pi_1(X, x_0)$. Nous avions dit qu'il s'agissait d'un revêtement connexe qui se distinguait des autres au sens où tout autre revêtement connexe est un quotient du revêtement universel, c'est ce que nous allons d'abord montrer. Nous allons construire un ordre partiel sur $\mathcal{L}'$ compatible avec $\tilde{\Psi}'$ (ce qui nous permettra de rendre rigoureuse la phrase : *le revêtement universel est le « plus grand » revêtement connexe*), pour cela nous allons donner une autre démonstration de la surjectivité de Ψ' et donc de la correspondance de Galois. Cette démonstration ne fait pas intervenir l'équivalence de catégories de [1] mais nécessite d'introduire la notion d'actions continues de groupe topologique et de supposer X séparé.
Remarquons que ces notions permettent de redémontrer sans trop de difficulté qu'un espace X connexe et localement connexe par arcs admet un revêtement simplement connexe si et seulement s'il est localement semi-1-connexe, ce qui est par exemple fait dans [4] (très clair, dans [4] §V.8 *Regular covering spaces and quotient spaces*) ou [5].

Lemme C.15

Soit $p : Y \to X$ un revêtement d'espace de base X séparé.
Alors Y est séparé.

Démonstration :

Soient $x, y \in Y$. Il existe U et V deux voisinages ouverts disjoints dans X de $p(x)$ et $p(y)$ respectivement car X est séparé.
Alors $p^{-1}(U)$ et $p^{-1}(V)$ sont deux ouverts disjoints contenant respectivement x et y.

■

Lemme C.16

Soit $p : Y \to X$ un revêtement d'espace total Y connexe et d'espace de base X séparé.
Le groupe discret $\mathrm{Aut}(p)$ des automorphismes de p agit continûment proprement et librement sur Y.

Démonstration :

• L'action est continue : soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}(p) \times Y & \longrightarrow & Y \\ (f, y) & \longmapsto & f(y) \end{array}$, soit U un ouvert de Y, alors $\varphi^{-1}(U) = \displaystyle\bigcup_{f \in \mathrm{Aut}(p)} \{f\} \times f^{-1}(U)$ est ouvert comme réunion d'ouverts (f continue et $\mathrm{Aut}(p)$ discret donc $\{f\}$ ouvert), donc φ est continue.
• L'action est libre : soient $f \in \mathrm{Aut}(p)$ et $y \in Y$ tels que $y = f \cdot y = f(y)$ alors $f(y) = y = Id_Y(y)$, comme Y est connexe, par unicité du relèvement $f = Id$ (3.10p8 de [1]).
• L'action est propre : on veut montrer que $\mathbf{gr} : \begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}(p) \times Y & \longrightarrow & Y \times Y \\ (f, y) & \longmapsto & (y, f(y)) \end{array}$ est propre.
(i) Comme l'action est libre, l'image réciproque d'un singleton est un singleton et donc un compact de $\mathrm{Aut}(p) \times Y$ (car $\mathrm{Aut}(p) \times Y$ est séparé comme produit de deux séparés, cf C.15).
(ii) Il reste à montrer que $\mathbf{gr}$ est fermée.
Soient F un fermé de $\mathrm{Aut}(p) \times Y$ et $(x, y) \in \overline{\mathbf{gr}(F)}$. On a d'abord par les définitions de $\mathbf{gr}$ et d'un automorphisme de p que $(p \times p)(\mathbf{gr}(F)) \subset \Delta$ où Δ est la diagonale de $X \times X$. Il vient ensuite par continuité de $p \times p$ que $(p \times p)(\overline{\mathbf{gr}(F)}) \subset \overline{(p \times p)(\mathbf{gr}(F))}$.

Donc $(p \times p)(x, y) \in (p \times p)(\overline{\mathbf{gr}(F)}) \subset \overline{(p \times p)(\mathbf{gr}(F))} \subset \overline{\Delta} = \Delta$, d'où $p(x) = p(y)$.
Soit un voisinage ouvert trivialisant V de $p(x)$. Soient V_x et V_y deux voisinages ouverts de x et y dans $p^{-1}(V)$ (qui est lui-même un ouvert de Y comme image réciproque d'un ouvert par p continue), alors, comme $(x, y) \in \overline{\mathbf{gr}(F)}$, $(V_x \times V_y) \cap \mathbf{gr}(F) \neq \varnothing$. Il existe donc $u \in V_x$ et $f \in \mathrm{Aut}(p)$ tels que $f(u) \in V_y$, alors $p(f(x)) = p(x) = p(y)$ car f est un morphisme de revêtement, mais comme p est un homéomorphisme sur V, $f \cdot x = f(x) = y$. Donc $(x, y) \in \mathbf{gr}(F)$.

■

On utilise le fait qu'un espace topologique X est séparé si et seulement si sa diagonale est fermée dans $X \times X$ pour obtenir que $\overline{\Delta} = \Delta$.

Proposition C.17

Soit $p : Y \to X$ un revêtement.
Chaque sous-groupe H de $\mathrm{Aut}(p)$ discret induit un revêtement $q : Y/H \to X$ et la projection $pr : Y \to Y/H$ est un morphisme de p sur q.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "pr"] \arrow[dr, "p"'] & & Y/H \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Démonstration :

L'application $q : \begin{array}{ccc} Y/H & \longrightarrow & X \\ H \cdot y & \longmapsto & p(y) \end{array}$ est bien définie car si $y = h \cdot x \in H \cdot x$ (i.e. $H \cdot x = H \cdot y$), $p(y) = p(h \cdot x) = p \circ h(y) = p(y)$ car h est un automorphisme de p.
On déduit de C.3 que q est continue. Nous allons maintenant montrer qu'un ouvert trivialisant U de p est aussi trivialisant pour q grâce à la troisième caractérisation d'un revêtement donnée dans [1].
Soit $x \in X$, alors il existe un ouvert U de X contenant x, des ouverts $(V_y)_{y \in p^{-1}(x)}$ de Y deux à deux disjoints tels que les restrictions $p_{|V_y} : V_y \to U$ soient des homéomorphismes et tels que $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{y \in p^{-1}(x)} V_y$.
Le sous-groupe H agit sur $p^{-1}(x)$. Soit $M \subset p^{-1}(x)$ un système de représentants des orbites de l'action de H sur la fibre $p^{-1}(x)$.
Alors pour tout $m \in M$, $W_m = \bigsqcup_{h \in H} V_{h \cdot m}$ est un ouvert comme réunion d'ouverts et coupe chaque orbite en un unique point.
On a ainsi que $q^{-1}(U) = \bigsqcup_{m \in M} W_m$.

■

Soit X un espace séparé localement semi-1-connexe et $x_0 \in X$, on souhaite démontrer la surjectivité de $\Psi' : \mathcal{K}' \to \mathcal{G}$ définie en 4.4. Dans toute cette partie, $\tilde{p} : \tilde{Y} \to X$ désigne un revêtement universel.
Soit H un sous-groupe de $\pi_1(X, x_0)$, en utilisant l'isomorphisme de groupes 4.14, on lui associe un sous-groupe $\tilde{H}$ de $\mathrm{Aut}(\tilde{p})$. D'après C.17, $q : \tilde{Y}/\tilde{H} \to X$ est un revêtement.
Montrons que le stabilisateur de $y_0 \in q^{-1}(x_0)$ par l'action de monodromie de $\pi_1(X, x_0)$ sur $q^{-1}(x_0)$ est H. Soit $z_0 \in \tilde{p}^{-1}(x_0)$ tel que $pr(z_0) = y_0$.
Soit $[\gamma] \in H$, alors il existe $f \in \tilde{H}$ tel que $\tilde{\tilde{\gamma}}_{z_0}(1) = f(z_0)$ où $\tilde{\tilde{\gamma}}_{z_0}$ est l'unique relevé de γ d'origine z_0.
Ainsi $\tilde{\gamma}_{y_0} = pr \circ \tilde{\tilde{\gamma}}_{z_0}$ est l'unique relevé de γ d'origine y_0 et $\tilde{\gamma}_{y_0}(1) = pr(\tilde{\tilde{\gamma}}_{z_0}(1)) = pr(f(z_0)) = y_0$, donc $[\gamma]$ est dans le stabilisateur de y_0.
Réciproquement, si $[\delta]$ est dans le stabilisateur de y_0, $\tilde{\delta}_{y_0}(1) = y_0$, où $\tilde{\delta}_{y_0}$ est l'unique relevé de δ d'origine y_0. L'application pr étant un revêtement (C.14 et C.16), $\tilde{\delta}_{y_0}$ se relève en un chemin $\tilde{\tilde{\delta}}_{z_0}$ d'origine z_0. Ainsi, $y_0 = \tilde{\delta}_{y_0}(1) = pr \circ \tilde{\tilde{\delta}}_{z_0}(1)$, donc il existe $f \in \tilde{H}$ tel que $\tilde{\tilde{\delta}}_{z_0}(1) = f(y_0)$, donc $[\delta] \in H$.

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\tilde{\gamma}"] \arrow[ddr, "\tilde{\tilde{\gamma}}"'] & X, x_0 \\ & \tilde{Y}/\tilde{H}, y_0 \arrow[u, "q"'] \\ & \tilde{Y}, z_0 \arrow[u, "pr"'] \arrow[uu, bend right=60, "\tilde{p}"'] \end{tikzcd}$$

Donc $H = \Psi'(q)$, d'où la surjectivité de Ψ'.

Nous obtenons ainsi une nouvelle démonstration de 4.15, qui de plus nous permet de voir que tout revêtement connexe de X est isomorphe à un quotient du revêtement universel.

Nous allons maintenant utiliser cette démonstration pour construire un ordre partiel sur $\mathcal{L}'$ compatible avec $\tilde{\Psi}'$.
Soient H et L deux sous-groupes de $\pi_1(X, x_0)$ tels que $L \subset H$. Considérons comme précédemment les revêtements $q_1 : \tilde{Y}/\tilde{H} \to X$ et $q_2 : \tilde{Y}/\tilde{L} \to X$.
L'application $\varphi : \tilde{Y}/\tilde{H} \to \tilde{Y}/\tilde{L}$ qui à la classe d'un élément x dans $\tilde{Y}/\tilde{H}$ associe la classe de x dans $\tilde{Y}/\tilde{L}$ est bien définie (si y et z sont dans la même classe modulo $\tilde{H}$, il existe $f \in \tilde{H} \subset \tilde{L}$ tel que $z = f(y)$ et donc y et z sont dans la même classe modulo $\tilde{L}$).
L'application $pr_{\tilde{H}} \circ \varphi : \tilde{Y} \to \tilde{Y}/\tilde{H} \to \tilde{Y}/\tilde{L}$ n'est rien d'autre que le projecteur $pr_{\tilde{L}} : \tilde{Y} \to \tilde{Y}/\tilde{L}$ qui est continu par définition de la topologie quotient. On déduit donc de C.3 que φ est continue. On vérifie aisément, par construction de q_1 et q_2 en C.17, que $q_2 \circ \varphi = q_1$, φ est donc un morphisme de revêtements qui envoie q_1 sur q_2.
On en déduit que $\tilde{\Psi}'$ transporte la relation d'inclusion de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{L}'$ en la relation d'ordre suivante : soient $\alpha, \beta \in \mathcal{L}'$ de représentants respectifs les revêtements pointés connexes $q_1 : (Y_1, y_1) \to (X, x_0)$ et $q_2 : (Y_2, y_2) \to (X, x_0)$, on notera $\alpha \preccurlyeq \beta$ si et seulement s'il existe un morphisme de revêtements $f : Y_1 \to Y_2$ qui envoie q_1 sur q_2. On montre aisément que $\preccurlyeq$ ne dépend pas des représentants choisis et est bien une relation d'ordre.

En remarquant que la classe du revêtement universel est associée au sous-groupe trivial, ou directement à l'aide de la propriété universelle, on obtient qu'il s'agit d'un minorant. Il s'agit ainsi du plus petit élément de $(\mathcal{L}', \preccurlyeq)$.
Afin d'obtenir du revêtement universel qu'il soit « le plus grand revêtement connexe », nous considérons l'ordre opposé $\preccurlyeq^{\mathrm{op}}$ de $\preccurlyeq$, la correspondance obtenue est alors *antitone*.

Nous obtenons ainsi une précision de 4.15 lorsque X est séparé :

Théorème C.18 : correspondance de Galois des revêtements connexes

L'ensemble des classes d'isomorphie des revêtements connexes pointés d'un espace X séparé et localement semi-1-connexe muni de l'ordre $\preccurlyeq^{\mathrm{op}}$ est en correspondance antitone avec les sous-groupes du groupe fondamental de X pour l'inclusion.
Par cette correspondance les classes d'isomorphie des revêtements galoisiens connexes de X s'identifient aux sous-groupes distingués du groupe fondamental de X.
La classe du revêtement universel s'identifie au sous-groupe trivial, il s'agit du plus grand revêtement connexe.

Références

[1] Jean-Baptiste Campesato and Agnès Marchand. Mémoire de m1 : Groupoïde fondamental et revêtements. Sous la direction de M. Ingo Waschkies, http://citron.9grid.fr/documents.html#doc14, 06 2011.

[2] Adrien Douady and Régine Douady. *algèbre et théories galoisiennes*. Nouvelle bibliothèque mathématique. Cassini, 2005. Deuxième édition, complètement refondue et augmentée d'un chapitre.

[3] François Labourie. Groupe fondamental et revêtements. http://www.math.u-psud.fr/~labourie/preprints/pdf/groupfond.pdf, 2008.

[4] William S. Massey. *Algebraic topology, an introduction*. Springer-Verlag, 1977.

[5] Frédéric Paulin. Topologie algébrique élémentaire. http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_topoalg.pdf, 2009–2010.