Décomposition de Dunford

Jean-Baptiste Campesato

11 octobre 2009

La décomposition de Dunford permet de décomposer certains endomorphismes en une somme d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent commutant. Une des applications est de réaliser des calculs matriciels rapides (par exemple calcul d'une puissance via la formule du binôme) ou d'obtenir la réduction de Jordan de l'endomorphisme de façon relativement simple. La réduction de Jordan fera probablement l'objet d'un futur article.
Cet article présente deux démonstrations de la décomposition de Dunford : la démonstration usuelle ainsi qu'une démonstration effective très en vogue sur internet. Cette dernière est basée sur la méthode de Newton-Raphson et permet ainsi d'obtenir un algorithme programmable pour calculer la décomposition de Dunford d'un endomorphisme.

1 Un peu de théorie...

$\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E.

Décomposition de Dunford

Soient K un corps commutatif, E un espace vectoriel sur K de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ dont *le polynôme minimal est scindé.*
Alors il existe un *unique* couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :
- $u = d + n$
- d est diagonalisable
- n est nilpotent
- n et d commutent : $n \circ d = d \circ n$.

De plus n et d sont des polynômes en u.

1.1 Démonstration usuelle

Remarque : le procédé de la démonstration reste valable pour n'importe quel polynôme annulateur scindé, entre autres, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, pour le polynôme caractéristique s'il est scindé. Dans ce cas on travaille avec les projecteurs spectraux et les sous-espaces caractéristiques. Notons aussi que l'existence d'un polynôme annulateur scindé implique que le polynôme minimal l'est aussi.

$\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E et $K[X]$est l'ensemble des polynômes à coefficients dans K à une indéterminée.

Lemme : le théorème des noyaux (ou lemme des noyaux)

Soient K un corps commutatif, E un espace vectoriel sur K et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Soient $P_1, \dots, P_m \in K[X]$ deux à deux premiers entres eux.
On pose $P = \prod_{i=1}^{m} P_i \in K[X]$, alors :
- $\operatorname{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}(P_i(u))$.
- Pour tout $i \in [\![1; m]\!]$ le projecteur de $\operatorname{Ker}(P(u))$ sur $\operatorname{Ker}(P_i(u)) \subset \operatorname{Ker}(P(u))$ est un polynôme en u.

Démonstration :

On procède par récurrence sur m :
Initialisation au rang $m = 2$:
$\operatorname{pgcd}(P_1, P_2) = 1 \Rightarrow \exists (A_1, A_2) \in K[X]^2$ tel que $A_1P_1 + A_2P_2 = 1$ (Bézout).

- Soit $x \in \operatorname{Ker}(P_1(u)) \cap \operatorname{Ker}(P_2(u))$ alors d'après la relation précédente
$x = [(A_1P_1)(u)](x) + [(A_2P_2)(u)](x) = 0$.
Donc $\operatorname{Ker}(P_1(u)) \cap \operatorname{Ker}(P_2(u)) = \{0\}$.

• Soit $x \in \text{Ker}\,(P_1(u)) \oplus \text{Ker}\,(P_2(u))$ alors $\exists!(x_1, x_2) \in \text{Ker}\,(P_1(u)) \times \text{Ker}\,(P_2(u))$ tel que $x = x_1 + x_2$ et :

$$\begin{aligned}(P(u))(x) = [P_1P_2(u)](x) &= [P_1P_2(u)](x_1) + [P_1P_2(u)](x_2) \\ &= [P_2(u) \circ P_1(u)](x_1) + [P_1(u) \circ P_2(u)](x_2) \\ &\quad \text{Car les polynômes en } u \text{ commutent.} \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $\text{Ker}\,(P_1(u)) \oplus \text{Ker}\,(P_2(u)) \subset \text{Ker}\,(P(u))$.

• Soit $x \in \text{Ker}\,(P(u))$ alors d'après la relation de Bézout :
$x = [(A_1P_1)(u)](x) + [(A_2P_2)(u)]$.

Posons $\begin{cases} x_1 = [(A_1P_1)(u)](x) \\ x_2 = [(A_2P_2)(u)](x) \end{cases}$, il vient alors :

$$\begin{aligned}(P_2(u))(x_1) &= [(P_2A_1P_1)(u)](x) \\ &= [(A_1P_1P_2)(u)](x) \\ &\quad \text{Car les polynômes en } u \text{ commutent.} \\ &= [A_1(u) \circ P(u)](x) \\ &= 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 \in \text{Ker}\,(P_2(u))$.

$$\begin{aligned}(P_1(u))(x_2) &= [(P_1A_2P_2)(u)](x) \\ &= [(A_2P_1P_2)(u)](x) \\ &\quad \text{Car les polynômes en } u \text{ commutent.} \\ &= [A_2(u) \circ P(u)](x) \\ &= 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow x_2 \in \text{Ker}\,(P_1(u))$.
Donc $x = x_1 + x_2 = x_2 + x_1 \in \text{Ker}\,(P_1(u)) \oplus \text{Ker}\,(P_2(u))$.
Donc $\text{Ker}\,(P(u)) \subset \text{Ker}\,(P_1(u)) \oplus \text{Ker}\,(P_2(u))$.

On a ainsi montré que $\text{Ker}\,(P(u)) = \text{Ker}\,(P_1(u)) \oplus \text{Ker}\,(P_2(u))$ et que le projecteur de $\text{Ker}\,(P(u))$ sur $\text{Ker}\,(P_1(u))$ est $(A_2P_2)(u)$ et que celui de $\text{Ker}\,(P(u))$ sur $\text{Ker}\,(P_2(u))$ est $(A_1P_1)(u)$. Il s'agit bien de polynômes en u.

<u>Hérédité :</u> supposons la propriété vraie pour un certain $m \in \mathbb{N}$.
Soient $P_1, \dots, P_{m+1} \in K[X]$ deux à deux premiers entres eux.
Posons $P = \prod_{i=1}^{m+1} P_i = \left(\prod_{i=1}^{m} P_i\right) P_{m+1}$, comme $\prod_{i=1}^{m} P_i$ et P_{m+1} sont deux polynômes premiers entres eux d'après le cas $m = 2$:
$\text{Ker}\,(P(u)) = \text{Ker}\,((P_1 \dots P_m)(u)) \oplus \text{Ker}\,(P_{m+1}(u))$ et les projecteurs Π_{m+1} de $\text{Ker}\,(P(u))$ sur $\text{Ker}\,(P_{m+1}(u))$ et Π' de $\text{Ker}\,(P(u))$ sur $\text{Ker}\,((P_1 \dots P_m)(u))$ sont des polynômes en u.

Puis d'après l'hypothèse de récurrence : $\text{Ker}\,((P_1 \dots P_m)(u)) = \bigoplus_{i=1}^{m} \text{Ker}\,(P_i(u))$ et pour tout $i \in [\![1; m]\!]$ le projecteur Π_i de $\text{Ker}\,((P_1 \dots P_m)(u))$ sur $\text{Ker}\,(P_i(u))$ est un polynôme en u.

On a ainsi que $\text{Ker}\,(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{m+1} \text{Ker}\,(P_i(u))$.

Puis le projecteur de $\text{Ker}\,(P(u))$ sur $\text{Ker}\,(P_{m+1}(u))$ est Π_{m+1} qui est un polynôme en u et pour tout $i \in [\![1; m]\!]$ le projecteur de $\text{Ker}\,(P(u))$ sur $\text{Ker}\,(P_i(u))$ est $\Pi_i \circ \Pi'$ qui est bien un polynôme en u.
Ce qui clôt la récurrence.

■

Lemme : critère de codiagonalisation (ou de diagonalisation simultanée)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K.
Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ alors :
f, g diagonalisables et commutant $\Leftrightarrow$ f et g sont simultanément diagonalisables.
C'est à dire qu'il existe une base de E telle que f et g soient tout deux diagonaux.

Remarque : on peut démontrer à l'aide d'une récurrence forte et du lemme de stabilité une généralisation de cette propriété. En effet si on se donne une famille d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux, alors ils sont simultanéments diagonalisables. Une démonstration est donnée en annexe à la fin de cet article.
La démonstration du critère nécéssite le lemme suivant :

Lemme dit de stabilité

Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.

1. Si f et g commutent alors pour toute valeur propre λ de f, le sous-espace propre de f associé à λ est stable par g.
2. Si f est diagonalisable alors l'endomorphisme induit par f sur un sous-espace vectoriel F de E est aussi diagonalisable.

Démonstration du lemme de stabilité :

Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda I_E)$ alors :
$(f - \lambda I_E)(g(x)) = f \circ g(x) - \lambda g(x) = g \circ f(x) - \lambda g(x) = g(f(x) - \lambda x) = g(0) = 0.$
Ce qui montre le premier point.

Pour montrer le second point on va utiliser le fait qu'un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il est annulé par un polynôme scindé à racines simples.
D'après l'hypothèse il existe $P \in K[X]$ scindé à racines simples tel que $P(f) = 0$.
Si on note $f' = f_{|F}$ alors $\forall x \in F$, $[P(f')](x) = [P(f)](x) = 0$.
Donc P annule f' et donc f' est diagonalisable.

■

Démonstration du critère de codiagonalisation :

On rappelle qu'un endomoprhisme u de E est diagonalisable si et seulement E est somme directe de ses sous-espaces propres.

$\Rightarrow$: soient $\{\mu_1, \ldots, \mu_r\}$ l'ensemble des valeurs propres de g et $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ l'ensemble des valeurs propres de f.

Comme f est diagonalisable on sait que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{s} \operatorname{Ker}(f - \lambda_i I_E)$.

Puis d'après le lemme précédent pour tout $i \in [\![1; s]\!]$ $\operatorname{Ker}(f - \lambda_i)$ est stable par g et $g_{|\operatorname{Ker}(f-\lambda_i)}$ est diagonalisable. Ce qui implique que :

$\operatorname{Ker}(f - \lambda_i) = \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{r} (\operatorname{Ker}(f - \lambda_i I_E) \cap \operatorname{Ker}(g - \mu_j I_E)).$

On a ainsi : $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{s} \operatorname{Ker}(f - \lambda_i I_E) = \bigoplus_{i=1}^{s} \left(\bigoplus_{j=1}^{r} (\operatorname{Ker}(f - \lambda_i I_E) \cap \operatorname{Ker}(g - \mu_j I_E)) \right).$

Si on ne garde que les intersections différentes de $\{0\}$ on peut écrire $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{l} F_k$ avec $l \leq rs$.

Si on note pour tout $k \in [\![1; l]\!]$ $\mathcal{B}_k$ une base de F_k alors $\mathcal{B} = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{l} \mathcal{B}_k$ est une base de E convenant.

$\Leftarrow$: si f et g commutent dans une base, ils commutent dans toute base.
Or par hypothèse il existe une base de E où f et g sont diagonaux. Or deux endomorphismes diagonaux commutent. On a donc exhibé une base où f et g commutent.

■

Démonstration de la décomposition de Dunford :

Existence :

Soit $\pi_u(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{m} (X - a_i)^{\omega_i}$ le polynôme minimal de u (avec $i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$).

On sait que $\pi_u(u) = 0$ (l'application nulle) et que les $(X - a_i)^{\omega_i}$ sont deux à deux premiers entres eux, donc d'après le théorème des noyaux :

$E = \mathrm{Ker}\,(\pi_u(u)) = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\,((X-a_i)^{\omega_i}(u))$ et $\forall i \in [\![1;m]\!]$ le projecteur Π_i de E sur $\mathrm{Ker}\,((X-a_i)^{\omega_i}(u))$ est un polynôme en u.
Posons $d = \sum_{i=1}^{m} a_i \Pi_i$ et $n = u - d$.
On a bien que $u = n + d$ et que n et d sont des polynômes en u et commutent donc.
Il reste à vérifier que d est diagonalisable et que n est nilpotent :
• Pour tout $i \in [\![1;m]\!]$ soit $\mathcal{B}_i = (e_{i_k})_k$ une base de $\mathrm{Ker}\,((X-a_i)^{\omega_i}(u))$ et alors $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{B}_i$ est une base de E vérifiant $d(e_{i_k}) = a_i e_{i_k}$.
Donc d est diagonalisable.
• Pour tout $x \in E$ il existe une unique décomposition $x = x_1 + \ldots + x_m$ dans $\bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\,((X-a_i)^{\omega_i}(u))$.
Soit $\omega = \max\{\omega_i\}$ alors $n^\omega(x) = \sum_{i=1}^{m} n^\omega(x_i) = \sum_{i=1}^{m} \left[(X-a_i)^\omega(u)\right](x_i) = 0$.
Donc n est nilpotent.

Unicité :
Soient (d', n') un autre couple convenant. Alors comme d' commute avec n' il commute aussi avec u et donc avec tout polynôme en u, en particulier avec d. Donc d et d' sont codiagonalisables, et donc d-d' est diagonalisable. De même n et n' commutent et donc $n - n'$ est nilpotent (formule du binôme en la somme des deux indices de nilpotence).
On a $u = d + n = d' + n' \Rightarrow \Delta = d' - d = n - n'$ avec Δ un endomorphisme diagonalisable et nilpotent, or le seul endomorphisme étant les deux à la fois est l'application nulle (en effet comme l'endomorphisme est nilpotent il admet 0 comme seule valeur propre et comme il est diagonalisable E est égal à son unique sous-espace propre : son propre noyau).
Donc $d = d'$ et $n = n'$.

■

1.2 Démonstration effective

La première démonstration donne une méthode de calcul de la décomposition de Dunford d'un endomorphisme à polynôme minimal scindé.
On propose ci-dessous une démonstration effective basée sur la méthode de Newton-Raphson qui permet de montrer l'existence de la décomposition de Dunford et d'obtenir un algorithme pour la calculer. Cette méthode est très en vogue sur internet. Voici l'adresse du document qui semble à la base de ce phénomène :
http ://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/Jordan.algor.pdf (Daniel Ferrand)
Une recherche sur internet permet d'obtenir plusieurs variantes (j'ai notamment apprécié celle de Sébastien Breteaux http ://favetto.free.fr/agregation/dunford_ferrand_simplifie.pdf et celle de Nicolas Ressayre http ://www.math.univ-montp2.fr/∼ressayre/dun.pdf).

Pour nous assurer que le polynôme minimal de notre endomorphisme est scindé nous allons travailler dans E un espace vectoriel sur K de dimension finie où cette fois K est un corps commutatif algébriquement clos (par exemple $\mathbb{C}$ d'après le théorème d'Alembert-Gauss).
Dans toute la suite on considère $u \in \mathcal{L}(E)$.

Nous avons d'abord besoin d'un lemme :

Lemme

$\forall Q \in K[X]$, $\exists \tilde{Q} \in K[X,Y]$ tel que $Q(X+Y) = Q(X) + YQ'(X) + Y^2\tilde{Q}(X,Y)$

Démonstration du lemme :

Il suffit de le montrer sur un monôme (formule du binôme) :

$$(X+Y)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} X^i Y^{m-i} = X^m + mX^{m-1}Y + Y^2 \sum_{i=2}^{m} \binom{m}{i} X^i Y^{m-i-2}$$

■

Démonstration effective de la décomposition de Dunford

Nous n'allons montrer que l'existence, l'unicité étant démontrée à la fin de la démonstration usuelle.

Raisonnons par analyse synthèse :
Analyse : Si on a un couple (d, n) convenant alors comme d est diagonalisable son polynôme minimal est scindé à racines simples puis les racines du polynôme minimal de d sont les valeurs propres de u (En effet on peut montrer que comme d et n commutent ils sont trigonalisables simultanément dans une base en d' et n' et donc $u = d + n$ est semblable à $d' + n'$ où la matrice de n' n'a que des 0 sur sa diagonale, ce qui permet de conclure.).
Synthèse : Alors si on note $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\omega_i}$ le polynôme caractéristique de u et $Q(X) = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i) = \dfrac{\chi_u}{\mathrm{pgcd}(\chi_u, \chi_u')}$ alors un endomorphisme d vérifiant $Q(d)$ serait un bon candidat pour obtenir l'endomorphisme diagonalisable de la décomposition de Dunford : il serait diagonalisable car annulé par un polynôme scindé à racines simples, vérifierait les conditions ci-dessus, il resterait à vérifier que $n = u - d$ soit nilpotent, que n et d commutent et sont des polynomes en u.
On va donc chercher un tel d grâce à la méthode de Newton-Raphson.

Définissons la suite d'endomorphismes suivante : $\begin{cases} u_0 = u \\ u_{n+1} = u_n - Q(u_n)Q'(u_n)^{-1} \end{cases}$

$K[u]$ est l'ensemble des polynômes en u à coefficients dans K.

Justifions d'abord qu'elle est bien définie, c'est à dire que le terme $Q'(u_n)$ est bien inversible. On va le montrer en deux étapes :
• On montre d'abord que pour tout $v \in K[u]$, $Q'(v)$ est inversible : comme les racines de Q sont simples, Q' est premier avec Q et donc avec le polynôme minimal de u et donc aussi avec celui de v que l'on note π_v.
Donc d'après le théorème de Bézout il existe $(A, B) \in K[X]^2$ tel que
$AQ' + B\pi_v = 1 \Rightarrow A(v) \circ Q'(v) = \mathrm{Id}$.
Donc $Q'(v)$ est inversible et son inverse est un polynôme en v et donc en u.
• On montre désormais par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in K[u]$:
Initialisation : $u_0 = u \in K[u]$
Hérédité : supposons $u_n \in K[u]$ alors $Q(u_n) \in K[u]$ et d'après le premier point $Q'(u_n)$ inversible avec $Q'(u_n)^{-1} \in K[u]$.
Donc $u_{n+1} \in K[u]$, ce qui clôt la récurrence.

On va maintenant montrer qu'à partir d'un certain rang $Q(u_n) = 0$, et donc que u_n stationne. Pour montrer la convergence de la suite dans la méthode de Newton-Raphson dans le cas de fonctions réelles on utilisait la formule de Taylor-Lagrange, on va adapter ceci à notre suite grâce au lemme.
On va montrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q(u_n) \in Q(u)^{2^n} K[u]$:
Initialisation : $Q(u_0) = Q(u) \in Q(u)K[u] = Q(u)^{2^0} K[u]$
Hérédité : on applique le lemme, donc il existe $v \in K[u_n, Q(u_n)Q'(u_n)^{-1}] = K[u]$ tel que :

$$\begin{aligned} Q(u_{n+1}) &= Q(u_n - Q(u_n)Q'(u_n)^{-1}) \\ &= Q(u_n) - Q(u_n)Q'(u_n)^{-1}Q'(u_n) + (Q(u_n)Q'(u_n)^{-1})^2 v \\ &= (Q(u_n)Q'(u_n)^{-1})^2 v \\ &= Q(u_n)^2(Q'(u_n)^{-2}v) \in Q(u)^{2^{n+1}} K[u] \text{ par hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

Ce qui clôt la récurrence.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton $\chi_u(u) = 0$. Or par définition de Q,
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq n_0 \Rightarrow \chi_u | Q^n \Rightarrow Q^n(u) = 0)$.

Comme $n \mapsto 2^n$ est strictement croissante et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q(u_n) \in Q(u)^{2^n}K[u]$, on en déduit qu'à partir d'un certain rang, $Q(u_n) = 0$, et donc que la suite stationne.

Notons d l'endomorphisme de E sur lequel la suite stationne, on a $Q(d) = 0$ avec Q scindé à racines simples, donc d est diagonalisable.
Si on note n_1 le rang ou la suite stationne, il vient :

$$\begin{aligned} u - d &= (u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + \ldots + (u_{n_1-1} - u_{n_1}) \\ &= Q(u_0)Q'(u_0)^{-1} + Q(u_1)Q'(u_1)^{-1} + \ldots + Q(u_{n_1-1})Q'(u_{n_1-1})^{-1} \in Q(u)K[u] \end{aligned}$$

car $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q(u_n) \in Q(u)^{2^n}K[u] \subset Q(u)K[u]$
Donc il existe $v \in K[u]$ tel que $u - d = Q(u)v$ et alors $(u-d)^{n_0} = Q(u)^{n_0}v^{n_0} = 0$ (car $Q(u)$ et v sont des polynômes en u et donc commutent).
On a ainsi montré que $u - d$ est nilpotent.
Puis $d \in K[u]$ (on a montré au début que la suite restait dans $K[u]$) donc d et $u - d$ sont des polynômes en u et commutent donc.
On a ainsi obtenu une décomposition de u vérifiant tous les points demandés.

■

2 En pratique

Dans cette partie K est un corps commutatif, E un espace vectoriel sur K de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

2.1 Calcul des projecteurs

Supposons le polynôme minimal de u scindé : $\pi_u(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{m}(X - a_i)^{\omega_i} = \prod_{i=1}^{m} P_i(X)$ avec $P_i(X) = (X - a_i)^{\omega_i}$ et $(i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j)$.
On a vu que d'après le théorème des noyaux $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\,(P_i(u))$.
On cherche à calculer les projecteurs Π_i de E sur $\mathrm{Ker}\,(P_i(u))$ qui sont des polynômes en u, afin d'obtenir la décomposition de Dunford :
$\forall i \in [\![1; m]\!]$ posons $Q_i = \frac{\pi_u}{P_i}$ alors les Q_i sont premiers (mais pas deux à deux !) entres eux et donc d'après le théorème de Bézout il existe $(A_1, \ldots, A_m) \in K[X]^m$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} A_iQ_i = 1$.
En appliquant en u il vient : $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} A_i(u) \circ Q_i(u) = \mathrm{Id}$, puis d'après l'unicité de la décomposition des vecteurs de E dans $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\,(P_i(u))$, il vient que $\forall i \in [\![1; m]\!]$, $\Pi_i = A_i(u) \circ Q_i(u)$.
La difficulté de la recherche des projecteurs réside donc dans la recherche d'une relation de Bézout (ce qui est simple si $m = 2$ mais moins au dessus !).

2.2 Petit piège

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a bien décomposé la matrice en la somme d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent... Cependant ils ne commutent pas !!!
Ceci pour montrer qu'il faut donc toujours refaire le raisonnement de la démonstration pour obtenir la décomposition de Dunford d'un endomorphisme et ne pas être tenté par une telle simplification.

2.3 Application

En cours de rédaction...

2.4 Implémentation de la démonstration effective

Voici une implémentation de la démonstration effective réalisée à l'aide de Sage : http://www.sagemath.org/.

Sage
```
def dunford(A):
    p=A.charpoly(x);
    p=p//(p.gcd(derivative(p)));
    q=derivative(p);
    An=A;
    Ann=An-p(An)*(q(An)^(-1));
    while An!=Ann:
        Tmp=Ann;
        Ann=An-p(An)*q(An)^(-1);
        An=Tmp;
    return Ann,A-Ann
```

Sage
```
dunford(Matrix(RationalField(),[[2,3,2],[-1,-2,-6],[1,1,5]]))
```

Résultat
```
(
[ 3  4  4]  [-1 -1 -2]
[ 0 -1 -4]  [-1 -1 -2]
[ 0  0  3], [ 1  1  2]
)
```

On trouve la décomposition :
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = D + N.$$

3 Annexe

Diagonalisation simultanée généralisée

Soient E un espace vectoriel sur K de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et I un ensemble non vide.
Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E diagonalisables et commutant deux à deux.
Alors les f_i sont simultanéments diagonalisables : il existe une base de E telle que $\forall i \in I$ f_i est diagonale.

Démonstration :

On réalise une récurrence forte sur $n = \dim(E)$.
Initialisation au rang n=1 : la propriété est évidente.
Hérédité : supposons un certain $n \in \mathbb{N}^*$ telle que la propriété soit vérifiée pour tout $k \leq n$.
Soit E un espace vectoriel de dimension $n+1$.
• Cas 1 : tous les f_i sont des homothéties et alors ils sont diagonalisables dans toute base de E.
• Cas 2 : $\exists i_0 \in I$ tel que f_{i_0} ne soit pas une homothétie.
Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de f_{i_0} et pour tout $k \in [\![1;r]\!]$, E_k le sous-espace propre de f_{i_0} associé à λ_k.
Comme f_{i_0} n'est pas une homothétie, on a $r \geq 2$.
D'après le premier point du lemme de stabilité, $\forall i \in I$, $\forall k \in [\![1;r]\!]$, E_k est stable par f_i.
$\forall i \in I$, $\forall k \in [\![1;r]\!]$, notons $f_{i,k}$ l'endomorphisme induit par f_i sur E_k.

Soit $k \in [\![1;r]\!]$.
$\forall i \in I$, $f_{i,k}$ est diagonalisable d'après le second point du lemme de stabilité.

Puis comme $1 \leq \dim(E_k) \leq n$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille $(f_{i,k})_{i\in I}$. Il existe donc une base $\mathcal{B}_k$ de E_k telle que $\forall i \in I$, $f_{i,k}$ soit diagonale.

Posons alors $\mathcal{B} = \bigcup_{k=1}^{r} \mathcal{B}_k$ alors comme $\forall i \in I$, $\forall k \in [\![1;r]\!]$, E_k est stable par f_i, on a que $\forall i \in I$, f_i est diagonale.
Ce qui clôt la récurrence.

$\blacksquare$