Dualité :
Résultats sur la dimension de l'espace dual

Jean-Baptiste Campesato

1er juin 2009

Il est aisé de démontrer que l'espace dual d'un espace vectoriel de dimension finie est aussi de dimension finie et de même dimension.
L'enjeu de cette note est de présenter des résultats sur la dimension de l'espace dual d'un espace vectoriel de dimension infinie.

Dans toute la suite K désigne un corps commutatif pour les lois $+$ et $\times$.
Lorsque l'on considérera un espace vectoriel E sur K, on notera indifférement la première loi du corps K et la loi de composition interne de E par $+$, le contexte determinant de quelle loi il s'agit.
La loi de composition externe à gauche de E sera notée . mais pour simplifier les écritures les signes . et $\times$ pourront être ommis, le contexte donnant le sens.

1 Rappels et cas de la dimension finie

Définition

Soit E un espace vectoriel sur K.
On nomme forme linéaire de E toute application linéaire de E dans K.

Définition - Notation

Soit E un espace vectoriel sur K.
L'ensemble des formes linéaires de E est noté E^* et se nomme *espace dual de E*.

Proposition 1

Soit E un espace vectoriel sur K.
Alors E^* est un espace vectoriel sur K pour les lois de compositions respectivement interne et externe à gauche suivantes :
- $\forall (f,g) \in {E^*}^2$, $(f +_* g) = (x \mapsto f(x) + g(x)) \in E^*$ (de neutre l'application nulle)
- $\forall (\lambda, f) \in K \times E^*$, $(\lambda ._* g) = (x \mapsto \lambda . g(x)) \in E^*$

Dans la suite les lois $+_*$ et $._*$ seront aussi notées $+$ et ., le contexte determinant s'il s'agit des lois de E ou de E^* (ou de K pour $+$).
De même, le signe $._*$ pourra etre ommis.
L'application nulle sera notée 0 tout comme les neutres de K et de E par leurs lois $+$.

> Démonstration facile et laissée au lecteur. ■

Proposition 2: Cas de la dimension finie

Soit E un espace vectoriel sur K de dimension finie.
Alors E^* est aussi de dimension finie et $\dim E = \dim E^*$

<u>Démonstration</u>

> Soient $n = \dim E$ et $(e_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une base de E.

Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ posons $e_i^* : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & [x]_i \end{array}$ où $[x]_i$ est la composante de x selon e_i. On montre aisément que les e_i^* sont linéaires et donc que $(e_i^*)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une famille de E^*.

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* = 0$.

Pour tout $j \in [\![1;n]\!]$ on a $0 = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*\right)(e_j) = \lambda_j e_j \Rightarrow \lambda_j = 0$.
Donc $(e_i^*)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une famille libre de E^*.

Soit $f \in E^*$.
Pour tout $x \in E$ on a par linéarité de f :
$f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} [x]_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i^*(x)$ (il s'agit d'éléments de K qui est un corps commutatif).
Donc $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i^*$.
Donc $(e_i^*)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une famille génératrice de E^*.

Donc $(e_i^*)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une base de E^*, on en déduit que E^* est de dimension finie et que $\dim E^* = n = \dim E$.

■

2 Cas de la dimension infinie

Notons que l'existence d'une base en dimension infinie nécéssite le lemme de Zorn et donc l'axiome de choix.
Nous admettons donc l'axiome du choix.

2.1 Théorème

Ce théorème est nommé *théorème d'Erdös-Kaplansky* dans Algèbre 1-3 de N. Bourbaki (chapitre II, Exercices, p193).
La démonstration suivante est une adaptation de celle de B. Gostiaux dans son Cours de mathématiques spéciales, tome 1 : algèbre pour rester accessible avec seulement les outils mathématiques du niveau bac+2 actuel (la version du livre fait appel à des résultats étudiés dans les chapitres précédents).

En se passant du lemme 1, le théorème d'Erdös-Kaplansky se présente aussi sous la forme suivante : si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension infinie ayant une base indexée par I, alors $\dim E^* = \operatorname{card}(K^I) = (\operatorname{card} K)^{\operatorname{card} I}$.

Théorème 1: Théorème d'Erdös-Kaplansky

Soit E un espace vectoriel sur K de dimension infinie.
Alors $\dim E^* = \operatorname{card} E^*$.

La démonstration de ce théorème requiert plusieurs lemmes :

K^I est l'ensemble des applications de I dans K.
On suppose connu que K^I est un espace vectoriel sur K.

Lemme: lemme 1

Soient E un espace vectoriel sur K de dimension infinie, I un ensemble tel que $\operatorname{card} I = \dim E$.
Alors E^* est isomorphe à K^I.

Démonstration du lemme 1

Il existe une base de E de la forme $(e_i)_{i\in I}$.
Soit $\theta : \begin{array}{ccc} E^* & \longrightarrow & K^I \\ \varphi & \longmapsto & (i \mapsto \varphi(e_i)) \end{array}$.

- θ linéaire : soient $(\varphi,\psi) \in {E^*}^2$ et $(\lambda,\mu) \in K^2$. Alors $\forall i \in I$, $(\theta(\lambda\varphi+\mu\psi))(i) = (\lambda\varphi+\mu\psi)(e_i) = \lambda\varphi(e_i)+\mu\psi(e_i) = \lambda(\theta(\varphi))(i)+\mu(\theta(\psi))(i) = (\lambda(\theta(\varphi))+\mu(\theta(\psi)))(i)$. Et donc $\theta(\lambda\varphi+\mu\psi) = \lambda(\theta(\varphi))+\mu(\theta(\psi))$.
- θ injective : $\theta(\varphi) = 0 \Rightarrow \forall i \in I,\ \varphi(e_i) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ (car une application linéaire est caractérisée par son image sur une base).
- θ surjective : soit $\psi \in K^I$, nous allons encore utiliser le fait qu'une application linéaire est caractérisée par son image sur une base. En effet si on pose $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i\in I} [x]_i\psi(i) \end{array}$, on a bien $\varphi \in E^*$ et $\psi = \theta(\varphi)$.

■

Lemme: lemme 2

Soient I un ensemble non vide et $(a_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ une famille finie d'éléments distincts de K^I.
Alors il existe une partie de I de cardinal fini non nul, J, telle que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, les éléments de $(a_k(i))_{i\in J} \in K^{\operatorname{card} J}$ soient distincts.

K^I est l'ensemble des applications de I dans K.
On suppose connu que K^I est un espace vectoriel sur K.

Démonstration du lemme 2

Pour tout $(k,l) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $k \neq l$, a_k et a_l sont distinctes, il existe donc au moins un $j_{k,l} \in I$ tel que $a_k(j_{k,l}) \neq a_l(j_{k,l})$ (ie pour chaque couple d'éléments k et l distincts de $[\![1;n]\!]$, on se donne un élément $j_{k,l}$ (axiome du choix), dont on a justifié l'existence, vérifiant $a_k(j_{k,l}) \neq a_l(j_{k,l})$).
Posons alors $J = \displaystyle\bigcup_{\{k,l\} \text{ paire de } [\![1;n]\!]} \{j_{k,l}\}$.
Alors $J \subset I$, $J \neq \varnothing$, $\operatorname{card} J \leq \frac{n(n-1)}{2}$ et pour tout $k \in [\![1;n]\!]$ les éléments de $(a_k(i))_{i\in J} \in K^{\operatorname{card} J}$ sont distincts.

■

Rappelons qu'une paire est composée de deux éléments distincts.

Rappelons que si $P \in K[X_1,\dots,X_n]$ (polynôme à n indéterminées et à coefficients dans K) alors $P(X_1,\dots,X_n) = \displaystyle\sum_{(j_1,\dots,j_n)\in\mathbb{N}^n} u_{j_1,\dots,j_n} X_1^{j_1}\dots X_n^{j_n}$

Lemme: lemme 3

Soient $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $(b_i)_{i\in[\![1;k]\!]}$ une famille finie de n-uplets distincts.
Il existe alors $P \in K[X_1,\dots,X_n]$ tel que $P(b_1) \neq 0$ et $\forall i \in [\![2;k]\!]$, $P(b_i) = 0$.

Le lemme 3 signifie simplement que toute partie finie de $\mathbb{K}^n$ est un ensemble algébrique affine en géométrie algébrique.

Démonstration du lemme 3

On note pour tout $i \in [\![1;k]\!]$, $b_i = (b_{i,1},\dots,b_{i,n})$.
On justifie le lemme par récurrence sur k le cardinal de la famille :
Initialisation : au rang $k = 2$.
Comme b_1 et b_2 sont distincts, il existe $j \in [\![1;n]\!]$ tel que $b_{1,j} \neq b_{2,j}$. Considérons alors le polynôme $P(X_1,\dots,X_n) = X_j - b_{2,j}$ alors $P(b_1) \neq 0$ et $P(b_2) = 0$.
Hérédité : supposons la propriété vraie à un certain rang k alors :
Soit $(b_i)_{i\in[\![1;k+1]\!]}$ une famille de n-uplets distincts.
D'après l'hypothèse de récurrence il existe $Q \in K[X_1,\dots,X_n]$ tel que $Q(b_1) \neq 0$ et $\forall i \in [\![2;k]\!]$, $Q(b_i) = 0$.

Puis d'après l'étude au rang $k=2$ il existe $R \in K[X_1,\dots,X_n]$ tel que $R(b_1) \neq 0$ et $R(b_{k+1}) = 0$.
Alors $P = QR$ vérifie la propriété pour toute la famille $(b_i)_{i\in[\![1;k+1]\!]}$.

■

Le lemme suivant nécéssite l'introduction d'une nouvelle notion :
Soit I un ensemble et $S = \{X_i,\, i \in I\}$ un ensemble d'indéterminées indexées par I.
On pose $\mathcal{A}_I = K[S]$.
Ce qui signifie donc que $P \in \mathcal{A}_I \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\, \exists I' = (i_1,\dots,i_n) \subset I,\, P \in K[X_{i_1},\dots,X_{i_n}]$.
(ie il existe une partie finie I' de I tel que P soit un polynôme par rapport aux indéterminées $X_i,\, i \in I'$).
Notons qu'on pourrait montrer que $\mathcal{A}_I$ est une algèbre.

Lemme: lemme 4

Soient I un ensemble et $a \in K^I$.
Soit $\delta_a : \begin{array}{ccc} \mathcal{A}_I & \longrightarrow & K \\ P(X_{i_1},\dots,X_{i_r}) & \longmapsto & P(a(i_1),\dots,a(i_r)) \end{array}$.
Alors $(\delta_a)_{a\in K^I}$ est une famille libre de $\mathcal{A}_I^*$, l'espace dual de $\mathcal{A}_I$.

Le lemme 4 est une conséquence du théorème de Dedekind d'indépendance des caractères.

Démonstration du lemme 4

Pour simplifier les notations, pour un polynôme $P(X_{i_1},\dots,X_{i_r})$ de $\mathcal{A}_I$ et une application a de K^I, on notera $P(a) = P(a(i_1),\dots,a(i_r))$.
Soit $(a_i)_{i\in[\![1;k]\!]}$ une famille finie d'éléments distincts de K^I.
Il s'agit d'une famille d'éléments de $\mathcal{A}_I^*$:
Pour tout $p \in [\![1;k]\!]$, pour tout $(P,Q) \in {\mathcal{A}_I}^2$ et pour tout $(\lambda,\mu) \in K^2$,
$\delta_{a_p}(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(a_p) = \lambda P(a_p) + \mu Q(a_p) = \lambda\delta_{a_p}(P) + \mu\delta_{a_p}(Q)$.
Et même d'une famille libre :
Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_k) \in K^k$ tel que $\displaystyle\sum_{p=1}^{k} \lambda_p \delta_{a_p} = 0$ (l'application nulle).
Supposons par l'absurde les λ_p non tous nuls. Fixons par exemple $\lambda_1 \neq 0$, quitte à réorganiser l'ordre des indices (grâce à la commutativité de la loi $+$ de K).
Alors d'après le lemme 2 il existe une partie J de I, de cardinal fini n, vérifiant pour tout $p \in [\![1;k]\!]$ que les éléments de $(a_p(i))_{i\in J} \in K^n$ sont distincts.
On pose désormais pour tout $p \in [\![1;k]\!]$, $b_p = (a_p(i))_{i\in J} \in K^n$.
Si on écrit $J = \{i_1,\dots,i_n\} \subset I$ alors d'après le lemme 3 il existe P un polynôme par rapport aux indéterminées $(X_{i_1},\dots,X_{i_n})$ (et donc $P \in \mathcal{A}_I$ car $J \subset I$) vérifiant $P(b_1) \neq 0$ et $\forall p \in [\![2;k]\!]$, $P(b_p) = 0$.
On remarque que $\forall p \in [\![1;k]\!]$, $P(a_p) = \delta_{a_p}(P)$ et donc $\delta_{a_1}(P) \neq 0$ et
$\forall p \in [\![2;k]\!]$, $\delta_{a_p}(P) = 0$.
Donc $\displaystyle\sum_{p=1}^{k} \lambda_p \delta_{a_p}(P) = \lambda_1 \underbrace{\delta_{a_1}(P)}_{\neq 0} = 0$ avec $\lambda_1 \neq 0$ ce qui est absurde.

■

Lemme: lemme 5

Soit I un ensemble de cardinal infini.
Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'ensemble des parties à k éléments de I a le même cardinal que I.
ie $\forall k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{card}\{J \in \mathfrak{P}(I),\, \operatorname{card} J = k\} = \operatorname{card} I$.

Démonstration du lemme 5

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{I}_k = \{J \in \mathfrak{P}(I),\, \operatorname{card} J = k\}$.
$\operatorname{card} I \leq \operatorname{card} \mathcal{I}_k$:
Fixons $k-1$ éléments distincts de I : $\{i_1,\dots,i_{k-1}\}$.

Pour obtenir un élément de $\mathcal{I}_k$ il suffit de compléter l'ensemble fixé avec un k-ème élément pris dans $I \setminus \{i_1, \dots, i_{k-1}\}$. On a donc $\operatorname{card} I - (k-1) = \operatorname{card} I$ (car I est de cardinal infini) choix possible.
Donc $\mathcal{I}_k$ admet au moins $\operatorname{card} I$ éléments.
On a donc $\operatorname{card} \mathcal{I}_k \geq \operatorname{card} I$.

<u>$\operatorname{card} \mathcal{I}_k \leq \operatorname{card} I$:</u>
Pour tout $J \in \mathcal{I}_k$ nous savons qu'il y a $\frac{k!}{(k-k)!} = k!$ injections de $[\![1;k]\!]$ dans $J \subset I$.
Ce qui nous donne $k!$ injections de $[\![1;k]\!]$ dans I que l'on peut numéroter avec les entiers de $[\![1;k!]\!]$: pour une de ces injections f, on note $\mathfrak{I}_J(f)$ l'indice lui correspondant.

On considère alors l'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \{\text{Injections de } [\![1;k]\!] \text{ dans } I\} & \longrightarrow & \mathcal{I}_k \times [\![1;k!]\!] \\ f & \longmapsto & (J = f([\![1;k]\!]), \mathfrak{I}_J(f)) \end{array}$.

Φ est bijective du fait de l'unicité de l'indice des injections une fois que leur image par $[\![1;k]\!]$ est connu. Ainsi :
$\operatorname{card} \{\text{Injections de } [\![1;k]\!] \text{ dans } \mathcal{I}_k\} = \operatorname{card} (\mathcal{I}_k \times [\![1;k!]\!])$

$$\begin{aligned} \Rightarrow k! \operatorname{card} \mathcal{I}_k &= \operatorname{card} \{\text{Injections de } [\![1;k]\!] \text{ dans } I\} \\ &\leq \operatorname{card} \{\text{applications de } [\![1;k]\!] \text{ dans } I\} \\ &= (\operatorname{card} I)^k \text{ car une application est caractérisée par le } k\text{-uplet formé des valeurs qu'elle prend.} \\ &= \operatorname{card} I \text{ (car } I \text{ est de cardinal infini).} \end{aligned}$$

Puis on a vu dans le premier point que $\operatorname{card} I \leq \operatorname{card} \mathcal{I}_k$ avec I de cardinal infini, donc $\mathcal{I}_k$ est aussi de cardinal infini. On a donc $k! \operatorname{card} \mathcal{I}_k = \operatorname{card} \mathcal{I}_k$.
Finalement on obtient $\operatorname{card} \mathcal{I}_k \leq \operatorname{card} I$.

■

Lemme: lemme 6

Soient E un espace vectoriel de dimension infinie et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E.
Alors E est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathcal{A}_I$ défini ci-dessus.

Le coeur de la bizarrerie du théorème d'Erdös-Kaplansky réside dans le lemme 6 : la $\mathbb{K}-$algèbre $\mathcal{A}_I = \mathbb{K}[X_i,\, i \in I]$ est seulement de dimension $\operatorname{card} I$ (alors que $\mathbb{R}[X,Y]$ est de dimension bien plus grande que 2, mais 2 n'est pas infini). Merci à Georges Elencwajg pour cette remarque.

<u>Démonstration du lemme 6</u>

Soit $\mathcal{M} = \{1\} \bigcup \{X_{i_1}^{p_1} \dots X_{i_k}^{p_k};\ k \in \mathbb{N}^*,\ \{i_1, \dots, i_k\}$ partie finie de I de cardinal k, $(p_1, \dots, p_k) \in (\mathbb{N}^*)^k\}$.
$\mathcal{M}$ est une base de $\mathcal{A}_I$ car un polynôme de $\mathcal{A}_I$ est combinaison linéaire des monômes $X_{i_1}^{p_1} \dots X_{i_k}^{p_k}$ et il s'agit d'une famille libre car une combinaison linéaire de monômes est identiquement nulle si et seulement si chaque coefficient est nul.
L'application $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ i & \longmapsto & X_i \end{array}$ est injective, donc $\operatorname{card} \mathcal{M} \geq \operatorname{card} I$. Donc $\operatorname{card} \mathcal{M}$ est aussi de cardinal infini.
Donc si on pose $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \setminus \{1\}$, $\mathcal{M}'$ est aussi de cardinal infini et $\operatorname{card} \mathcal{M}' = \operatorname{card} \mathcal{M}$.

Soit $J = \{i_1, \dots, i_k\}$ une partie finie de I de cardinal $k \in \mathbb{N}$.
Alors $\operatorname{card} \left((\mathbb{N}^*)^J \right) = (\operatorname{card} \mathbb{N}^*)^k = (\operatorname{card} \mathbb{N})^k = \operatorname{card} \mathbb{N}$ car $\mathbb{N}$ est de cardinal infini.
Donc pour toute partie finie J de I, on peut se donner (axiome du choix) une bijection $\theta_J : (\mathbb{N}^*)^J \to \mathbb{N}$. ie à chaque partie finie J de I on assigne une unique bijection θ_J que l'on conserve pour la suite.

Rappelons que $\operatorname{card} \mathbb{N}$ est le plus petit cardinal infini (pour la définition de $\mathcal{F}$).

Notons $\mathcal{F} = \{(i_1, \dots, i_k) \in I^k,\ k \in \mathbb{N}^*\}$ l'ensemble des sous familles finies de I (non vides).
Soit $\theta : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}' & \longrightarrow & \mathcal{F} \times \mathbb{N} \\ X_{i_1}^{p_1} \dots X_{i_k}^{p_k} & \longmapsto & (J = (i_1, \dots, i_k), \theta_J(i_l \mapsto p_l)) \end{array}$.
Comme les monômes de $\mathcal{M}'$ sont caractérisés par leurs indices $(i_1, \dots, i_k)$ des indéterminées et leurs puissances associées $(p_1, \dots, p_k)$ et comme les θ_J sont bijectifs, θ est une bijection.
On a donc $\operatorname{card} \mathcal{F} \cdot \operatorname{card} \mathbb{N} = \operatorname{card} \mathcal{M}' = \operatorname{card} \mathcal{M}$.
Et comme $\operatorname{card} \mathcal{F} \cdot \operatorname{card} \mathbb{N} = \operatorname{card} \mathcal{F}$ du fait que $\operatorname{card} \mathbb{N}$ est le plus petit cardinal infini, on a $\operatorname{card} \mathcal{F} = \operatorname{card} \mathcal{M}$.

Posons $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}_k = \{J \in \mathfrak{P}(I),\ \operatorname{card} J = k\}$.
Puis d'après le lemme 5, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{card} \mathcal{I}_k = \operatorname{card} I$, donc $\forall k \in \mathbb{N}$ il existe une bijection $\varphi_k : \mathcal{I}_k \to I$ (axiome du choix, dans toute la suite, pour chaque k on garde le même φ_k).
Posons alors $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \times I \\ J & \longmapsto & (\operatorname{card} J, \varphi_{\operatorname{card} J}(J)) \end{array}$.
Comme pour chaque k, φ_k est bijective, on peut exhiber une réciproque. φ est donc bijective.
On a ainsi $\operatorname{card} \mathcal{F} = \operatorname{card} \mathbb{N}^* \cdot \operatorname{card} I = \operatorname{card} I$ car $\operatorname{card} \mathbb{N}^* = \operatorname{card} \mathbb{N}$ est le plus petit cardinal infini.

On a donc montré que $\operatorname{card} \mathcal{M} = \operatorname{card} \mathcal{F} = \operatorname{card} I$. Ce qui signifie que E et $\mathcal{A}_I$ ont des bases équipotentes et sont donc isomorphes.

■

Lemme: lemme 7

Si deux espaces vectoriels sont isomorphes alors leurs espaces duals sont aussi isomorphes.

Démonstration du lemme 7

Ces résultats découlent d'une adaptation de l'étude de l'orthogonalité dans la théorie de la dualité (à ne pas confondre avec celle des espaces préhilbertiens) et de la notion de transposée dans cette dernière. On peut en trouver une introduction dans le livre de B. Gostiaux.
Soient E et F deux espaces vectoriels sur K.
Pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$ on considère la transposée de u défini ainsi :
${}^t u : \begin{array}{ccc} F^* & \longrightarrow & E^* \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ u \end{array}$.
${}^t u \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$:
Soient $(\varphi, \psi) \in (F^*)^2$ et $(\lambda, \mu) \in K^2$ alors :
${}^t u(\lambda\varphi + \mu\psi) = (\lambda\varphi + \mu\psi) \circ u = \lambda\varphi \circ u + \mu\psi \circ u = \lambda {}^t u(\varphi) + \mu {}^t u(\psi)$.
u surjective $\Rightarrow {}^t u$ injective : (La réciproque est vraie mais inutile ici)
Comme u est surjective, $\operatorname{Im} u = F$, ce qui signifie que lorsque x parcourt E entièrement, $u(x)$ parcourt F entièrement et donc :
$\varphi \in \operatorname{Ker} {}^t u \Rightarrow \forall x \in E,\ \varphi \circ u(x) = 0 \Rightarrow \forall y \in F,\ \varphi(y) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.
Donc $\operatorname{Ker} {}^t u = \{0\}$, ce qui implique que ${}^t u$ est injective.
u injective $\Rightarrow {}^t u$ surjective : (La réciproque est vraie mais inutile ici)
On peut restreindre l'ensemble d'arrivée de u pour obtenir une surjection et donc une bijection. On note cette restriction $\tilde{u} : E \to \operatorname{Im} u$.
Notons que $\tilde{u}$ est toujours linéaire : on a un isomorphisme de E dans $\operatorname{Im} u$, qui est un sous espace vectoriel de F.
Soit $\psi \in E^*$.
$\operatorname{Im} u$ est un sous espace vectoriel de F et admet donc un supplémentaire S dans F.
On a ainsi : $F = \operatorname{Im} u \bigoplus S$.
Donc $\forall x \in F$, $\exists!([x]_u, [x]_S) \in \operatorname{Im} u \times S$, $x = [x]_u + [x]_S$.
On définit alors $\varphi : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & \psi \circ \tilde{u}^{-1}([x]_u) \end{array}$.
Comme $\psi \circ \tilde{u}^{-1}$ est linéaire par composition d'applications linéaires, φ l'est aussi : soient $(x, y) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in K^2$ alors
$\varphi(\lambda x + \mu y) = \psi \circ \tilde{u}^{-1}(\lambda[x]_u + \mu[y]_u) = \lambda\psi \circ \tilde{u}^{-1}([x]_u) + \mu\psi \circ \tilde{u}^{-1}([y]_u) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)$.
Puis soit $x \in E$ alors comme $u(x) = [u(x)]_u$ on a $\varphi \circ u(x) = \psi \circ \tilde{u}^{-1}([x]_u) \circ u(x) = \psi(x)$.
On a ainsi montré que pour tout $\psi \in E^*$, $\exists \varphi \in F^*$, $\psi = {}^t u(\phi)$.
Donc ${}^t u$ est surjective.

Supposons donc E et F isomorphes, alors il existe u un isomorphisme de E dans F, ${}^t u$ est donc un isomorphisme de F^* dans E^*, ce qui implique que E^* est F^* sont isomorphes.

■

Démonstration du théorème : (enfin !)

$\dim E^* \geq \operatorname{card} E^*$:
Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E alors d'après le lemme 6 E et $\mathcal{A}_I$ sont isomorphes. Et donc d'après le lemme 7 E^* et $\mathcal{A}_I^*$ sont aussi isomorphes.
Puis d'après le lemme 4 $(\delta_a)_{a\in K^I}$ est une famille libre de $\mathcal{A}_I^*$.
On a donc : $\dim E^* = \dim \mathcal{A}_I^* \geq \operatorname{card}\left((\delta_a)_{a\in K^I}\right) = \operatorname{card}\left(K^I\right)$.
Or d'après le lemme 1 $\operatorname{card}\left(K^I\right) = \operatorname{card} E^*$.
On obtient : $\dim E^* \geq \operatorname{card} E^*$.
$\operatorname{card} E^* \geq \dim E^*$:
Soit $\mathcal{B}$ une base de E^* alors comme $\mathcal{B} \subset E^*$ on a :
$\dim E^* = \operatorname{card} \mathcal{B} \leq \operatorname{card} E^*$.

■

2.2 Deuxième proposition

Proposition 3

Soit E un espace vectoriel sur K de dimension infinie.
Alors E et E^* ne sont pas isomorphes ($\Leftrightarrow \dim E \neq \dim E^*$).

La démonstration de cette propriété nécessite encore un lemme :

Lemme: lemme

Soit I un ensemble non vide alors il n'y pas d'injection de $\{0;1\}^I$ dans I.

$\{0;1\}^I$ est l'ensemble des applications de I dans $\{0;1\}$.

Démonstration du lemme

Supposons par l'absurde l'existence d'une application injective $\Psi : \{0;1\}^I \to I$.
Nous pouvons restreindre l'ensemble d'arrivée de Ψ à son image pour obtenir une surjection et donc une bijection. Notons $\tilde{\Psi} : \{0;1\}^I \to \mathrm{Im}\Psi$ cette nouvelle application.
Soit $\varphi \in \{0;1\}^I$ défini ainsi :
$\forall i \in I,\ \varphi(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in \mathrm{Im}\Psi \text{ et } \left(\tilde{\Psi}^{-1}(i)\right)(i) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Puis posons $m = \Psi(\varphi) \in I$, on a alors que $m \in \mathrm{Im}\Psi$ et que $\tilde{\Psi}^{-1}(m) = \varphi$ (d'après la bijectivité de $\tilde{\Psi}$).

- Si $\varphi(m) = 1$ alors, par définition de φ, on a $\left(\tilde{\Psi}^{-1}(m)\right)(m) = 0$ et, par définition de m, on a $\left(\tilde{\Psi}^{-1}(m)\right)(m) = \varphi(m) = 1$. D'où une première contradiction.
- Si $\varphi(m) = 0$, comme $m \in \mathrm{Im}\Psi$, on a, par définition de φ, que $\left(\tilde{\Psi}^{-1}(m)\right)(m) = 1$ or $\left(\tilde{\Psi}^{-1}(m)\right)(m) = \varphi(m) = 0$. D'où une seconde contradiction.

Il ne peut donc y avoir d'injection de $\{0;1\}^I$ dans I.

■

On retrouve en fait le théorème de Cantor. En effet on montre que $2^{\operatorname{card} I} > \operatorname{card} I$ or $\operatorname{card} \mathfrak{P}(I) = 2^{\operatorname{card} I}$, d'où $\operatorname{card} \mathfrak{P}(I) > \operatorname{card} I$.

Démonstration de la proposition

Comme K est un corps il admet au moins deux éléments distincts (les neutres des deux lois de compositions internes, qui sont bien distincts par définition d'un corps), on a ainsi $\operatorname{card} K \geq 2$.
Soit I un ensemble tel que $\operatorname{card} I = \dim E$.
D'après le premier lemme du théorème on a $\operatorname{card} E^* = \operatorname{card}\left(K^I\right)$ et d'après le théorème précédent on a $\dim E^* = \operatorname{card} E^*$.
Donc $\dim E^* = \operatorname{card} E^* = (\operatorname{card} K)^{\operatorname{card} I} \geq 2^{\operatorname{card} I}$.
Ensuite d'après le lemme ci-dessus on a $2^{\operatorname{card} I} = (\operatorname{card}\{0;1\})^{\operatorname{card} I} > \operatorname{card} I$.

On a ainsi $\dim E^* \geq 2^{\operatorname{card} I} > \operatorname{card} I = \dim E$.
E et E^* sont donc de dimensions différentes et ne sont donc pas isomorphes.

$\blacksquare$