

Complétude et dimension d'un espace vectoriel normé

Jean-Baptiste Campesato

10 février 2010

Le but de cet article est de présenter les liens entre la dimension d'un espace vectoriel normé et de sa possible complétude. On se pose la question de savoir si la dimension d'un espace vectoriel normé peut nous apporter des précisions sur sa complétude. Pour cela on donne d'abord quelques rappels et définitions, puis on s'attaque au cas connu de la dimension finie pour ensuite s'intéresser au cas de la dimension infinie, notamment de la dimension dénombrable qui nous offre un résultat inattendu.

1 Introduction et rappels

La complétude n'est pas une notion de topologie générale, en effet, elle ne peut être défini à partir de la connaissance des ouverts, fermés et voisinages (considérer par exemple \mathbb{R} muni des métriques $d(x, y) = |y - x|$ et $\delta(x, y) = |\arctan(y) - \arctan(x)|$: elles définissent la même topologie mais (\mathbb{R}, d) est complet alors que (\mathbb{R}, δ) ne l'est pas).

Le cadre le plus large permettant de parler de complétude est celui des espaces topologiques dit uniformes. Cependant, ces espaces uniformes ne sont pas très étudiés du fait de leur complexité, on va donc se restreindre à des espaces uniformes particuliers : les espaces métriques. L'étude des espaces métriques complets est riche en enseignements, une application immédiate est que dans un tel espace on peut vérifier la convergence d'une suite (ou même d'une fonction, grâce au *critère de Cauchy*) sans en connaître la limite.

On retrouve ensuite des théorèmes fondamentaux : le théorème des fermés emboîtés, le théorème du point fixe de Picard (qui permet de démontrer le théorème des fonctions implicites, le théorème d'inversion locale qui est équivalent au premier ou encore le théorème de Cauchy-Lipschitz), le théorème du prolongement des applications uniformément continues (Une fonction uniformément continue définie sur une partie dense d'un espace métrique E à valeurs dans un espace complet F admet un unique prolongement continue de E dans F , ce prolongement est de plus uniformément continue), le théorème de Baire (dont les applications sont nombreuses : on l'utilisera déjà dans cet article, il permet aussi de démontrer dans le cadre des espaces vectoriels normés le théorème de l'application ouverte et ses conséquences (théorème de Banach ou de l'isomorphisme, théorème du graphe fermé), le théorème de Banach-Steinhaus...), le théorème des approximations successives (e.v.n.) ou encore dans le cadre des séries à termes dans un espace vectoriel normé, c'est la complétude qui permet d'obtenir la convergence simple à partir de la convergence absolue.

1.1 Espaces métriques

Définition : distance

Soit E un ensemble, on dit qu'une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est une distance sur E si et seulement si :

- $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$ (*symétrie*).
- $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (*séparation*).
- $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*inégalité triangulaire*)

On remarque que l'on a forcément $d(x, y) \geq 0$:

$$\forall (x, y) \in E^2, (0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y) \Rightarrow d(x, y) \geq 0).$$

Définition : espace métrique

Un ensemble E muni d'une distance d est nommé espace métrique, que l'on note souvent (E, d) (en effet il faut préciser la distance utilisée car un ensemble peut avoir plusieurs distances).

Définitions : boules ouvertes et fermées

Soient (E, d) un espace métrique, $x \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- On nomme boule ouverte de centre x et de rayon r l'ensemble :

$$\mathcal{B}(x, r) = \{y \in E, d(x, y) < r\}$$

- On nomme boule fermée de centre x et de rayon r l'ensemble :

$$\mathcal{B}_f(x, r) = \{y \in E, d(x, y) \leq r\}$$

En se rappelant que les ouverts d'une topologie sont les ensembles voisinages de tous leurs points (une démonstration en est donnée sur le site dans l'article *Caractérisation des topologies par leurs voisinages*), on peut définir les parties ouvertes d'un espace métrique de la façon suivante, et vérifier qu'il s'agit bien de la définition d'une topologie (Voir le fichier *notes.pdf* accompagnant l'article cité ci-dessus).

Définition

Soient (E, d) un espace métrique et $O \in \mathfrak{P}(E)$.

On dit que O est un ouvert si et seulement si $\forall x \in O, \exists r \in \mathbb{R}_+, \mathcal{B}(x, r) \subset O$.

$\mathfrak{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E .

Une démonstration similaire à celle de la propriété disant que les ouverts d'une topologie sont les ensembles voisinages de tous leurs points permet de montrer que les ouverts de (E, d) sont en fait les réunions de boules ouvertes.

Proposition

Soit (E, d) un espace métrique, alors les ouverts de (E, d) sont les réunions de boules ouvertes

Démonstration :

Soit O un ouvert de (E, d) . Si $O = \emptyset$ (en effet, après $\forall x \in \emptyset$ toute propriété sur x est vraie, donc on a bien un ouvert) alors le raisonnement qui suit reste valable en gardant en mémoire que la réunion sur une partie vide, est l'ensemble vide (voir *notes.pdf* de l'article sus-cité). Donc $\forall x \in O, \exists r_x \in \mathbb{R}_+, \mathcal{B}(x, r_x) \subset O$.

On a donc $\bigcup_{x \in O} \mathcal{B}(x, r_x) \subset O$ comme réunion d'ensembles inclus dans O . Puis pour

tout $y \in O$, on a $y \in \mathcal{B}(y, r_y)$ et donc $y \in \bigcup_{x \in O} \mathcal{B}(x, r_x)$. D'où $O \subset \bigcup_{x \in O} \mathcal{B}(x, r_x)$ et

donc $\bigcup_{x \in O} \mathcal{B}(x, r_x) = O$.

Réciproquement, considérons $O = \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}(x_i, r_i)$

avec un ensemble quelconque I , et pour tout $i \in I, x_i \in E$ et $r_i \in \mathbb{R}_+$.

Si $I = \emptyset$, on a $O = \emptyset$ (toujours d'après *notes.pdf*) et donc O est bien un ouvert.

Si non, $\forall x \in O, \exists j \in I, x \in \mathcal{B}(x_j, r_j)$ et alors

$\mathcal{B}(x, r_i - d(x_i, x)) \subset \mathcal{B}(x_j, r_j) \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}(x_i, r_i)$, d'où le résultat.

En effet, $d(x_i, x) < r_i$ d'où $r_i - d(x_i, x) > 0$ et

$\forall y \in \mathcal{B}(x, r_i - d(x_i, x)), d(x_i, y) < d(x_i, x) + d(x, y) < d(x_i, x) + r_i - d(x_i, x) = r_i$. ■

Proposition

Soit (E, d) un espace métrique, alors l'ensemble des ouverts définit bien une topologie.

1.2 Suites de Cauchy et complétude

Dans le cas des espaces métriques, on a une caractérisation séquentielle de la complétude via la notion de suite de Cauchy.

Définition : suite de Cauchy

Soient (E, d) un espace métrique et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

La suite (u_n) est dite de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p, q \geq N \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \varepsilon)$$

Voici quelques propriétés immédiates sur les suites de Cauchy, des théorèmes plus fondamentaux étant cités dans l'introduction :

Propriétés

- Toute suite de Cauchy est bornée.
- Toute suite convergente est de Cauchy.
- Toute suite extraite d'une suite de Cauchy est encore de Cauchy.
- L'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est encore une suite de Cauchy.
- Si une suite de Cauchy admet une suite extraite convergente, alors elle converge vers cette limite.

Un petit mot sur la deuxième propriété, la réciproque est-elle vraie (i.e. toute suite de Cauchy est-elle convergente) ?

Et bah non, prenons $u_n = \frac{1}{n+1}$ défini sur \mathbb{N} à termes dans $E =]0, +\infty[$ (sous-espace topologique de \mathbb{R} (muni de $d(x, y) = |y - x|$) pour la topologie induite).

Comme (u_n) converge vers 0, et donc dans $E' =]0, +\infty[$, elle est de Cauchy d'après la première propriété, mais lorsque l'on considère E , elle n'est pas convergente dans E .

D'où la caractérisation séquentielle des espaces métriques complets :

Définitions

Un espace métrique (E, d) est dit complet si et seulement si toute suite de Cauchy de E converge dans E (ce dernier point est très important, nous venons de le voir).

Une partie de E est dite complète si et seulement si elle l'est pour la distance induite (on peut donc remplacer partie par sous-espace).

Propriétés (suite)

- Un espace compact est complet.
- Un espace dont toutes les boules fermées sont compactes est complet.
- Un sous-espace complet est fermé.
- Dans un espace complet, un fermé est un sous-espace complet.
- Les parties complètes d'un espace complet sont les parties fermées.
- Les parties complètes de \mathbb{R} sont les fermés de \mathbb{R} .
- Une intersection de sous-espaces complets est un sous-espace complet.
- Une réunion finie de sous-espaces complets est un sous-espace complet.
- Soit une application entre espaces métriques $f : E \rightarrow F$ bijective, continue et de réciproque uniformément continue. Alors E complet $\Rightarrow F$ complet.

Pour des démonstrations, plus d'explications, des contres-exemples... Je ne peux que vous conseiller la lecture du Cours de mathématiques spéciales, tome 2 : topologie et analyse réelle de BERNARD GOSTIAUX qui est à mon avis le cours le plus complet (sans mauvais jeu de mots) de topologie *générale* restant accessible à un niveau bac+2...

1.3 Espaces vectoriels normés

On admet tous les résultats sur les espaces vectoriels notamment l'existence d'une base (modulo l'axiome du choix, pour le lemme de Zorn, dans le cas de la dimension infinie).

Définition : norme

Soit E un espace vectoriel sur un corps K valué non discret (on utilise les notations usuelles pour les lois), on dit qu'une application $\mathcal{N} : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une norme de E si et seulement si :

- $\forall x \in E, \mathcal{N}(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$ (*non-dégénérescence*).
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in K, \mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$ (*positive-homogénéité*).
- $\forall (x, y) \in E^2, \mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$ (*inégalité triangulaire*).

Quelques conséquences immédiates de la définition :

- $\mathcal{N}(0_E) = 0$:
 $\mathcal{N}(0_E) = \mathcal{N}(0x) = 0\mathcal{N}(x) = 0$ (avec x dans E quelconque)
- $\forall x \in E, \mathcal{N}(x) \geq 0$:
 $\forall x \in E, 0 = \mathcal{N}(0_E) = \mathcal{N}(x - x) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(-x) = 2\mathcal{N}(x) \Rightarrow \mathcal{N}(x) \geq 0$.
- $\forall (x, y) \in E^2, |\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y)| \leq \mathcal{N}(x - y)$ (*inégalité triangulaire inversée*) :
 $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(x - y + y) \leq \mathcal{N}(x - y) + \mathcal{N}(y) \Rightarrow \mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y) \leq \mathcal{N}(x - y)$.
 En inversant les rôles, on obtient : $\mathcal{N}(y) - \mathcal{N}(x) \leq \mathcal{N}(x - y)$.
 D'où le résultat.

On utilise souvent la notation $\|\cdot\| : \|x\| = \mathcal{N}(x)$.

Je ne traiterai que des résultats nécessaires au développement.

Proposition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors :

$$d : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \|x - y\| \end{array} \text{ est une distance sur } E.$$

On peut donc utiliser ce qui a été vu précédemment et définir une topologie sur un espace vectoriel normé pour la distance induite par sa norme.

Définition

Un espace vectoriel normé complet est nommé *espace de Banach*.

Avant de passer au développement, une petite remarque : une norme permet de définir une distance, mais toute distance ne découle pas d'une norme.

Proposition

Soit (E, d) un espace métrique avec E un espace vectoriel sur un corps K valué non discret, alors d découle d'une norme si et seulement si :

- $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x + z, y + z) = d(x, y)$ (*stabilité par translation*).
- $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in K, d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y)$ (*positive-homogénéité*).

2 Dimension et complétude

On peut enfin s'attaquer au coeur du problème : y a-t-il des liens entre la dimension d'un espace vectoriel normé et sa possible complétude pour la topologie découlant de sa norme ? On commence par une propriété très connue, présente dans tous les cours : le cas de la dimension finie.

2.1 Cas de la dimension finie

Propriété

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Démonstration :

Toute suite de Cauchy est bornée et est donc dans une boule fermée qui est compacte (dimension finie).

Ainsi elle admet une valeur d'adhérence dans cette boule fermée et converge donc. ■

Remarque : en particulier tout sous-espace vectoriel de dimension finie est complet donc fermé.

2.2 Cas de la dimension dénombrable

Ici E est un espace vectoriel normé de dimension dénombrable, c'est-à-dire : $\dim E = \text{card } \mathbb{N} = \aleph_0$. Et nous ne considérons que des espaces vectoriels sur \mathbb{R} (ou toute extension de \mathbb{R}), en effet la propriété suivante n'est plus vraie sur \mathbb{Q} .

Propriété

Aucun espace vectoriel normé de dimension dénombrable n'est complet.

2.2.1

Première démonstration : utilisation du théorème de Baire

Théorème des fermés emboîtés

Soient (E, d) un espace métrique complet, $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante (pour l'inclusion) de fermés non vides de E tel que le diamètre des F_n tende vers 0 quand n tend vers l'infini, c'est-à-dire : $\delta(F_n) = \sup_{(x,y) \in F_n^2} d(x,y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Alors il existe $l \in E$ tel que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{l\}$.

Démonstration :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \neq \emptyset$, donc il existe $x_n \in F_n$.

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q < p$, on a $d(x_p, x_q) \leq \delta(F_q) \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 0$.

Donc la suite (x_n) ainsi construite est de Cauchy à termes dans E complet, donc il existe $l \in E$ tel que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$.

Puis comme $\forall m \in \mathbb{N}$, (x_n) est à terme dans F_m à partir d'un certain rang (au pire m), avec F_m fermé, on a $l \in F_m$.

Donc $l \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Soit $k \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $(k, l) \in F_n^2 \Rightarrow 0 \leq d(k, l) \leq \delta(F_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow d(k, l) = 0 \Rightarrow k = l$.

D'où l'unicité. ■

Théorème de Baire

Soit (E, d) un espace métrique complet, alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E .

C'est-à-dire : soit $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'ouverts (pas forcément tous distincts, on peut donc appliquer le théorème au cas fini) denses dans E , c'est-à-dire telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{O_n} = E$, alors $\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n} = E$.

Démonstration :

Posons $O = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$.

Soient $x \in E$ et V un voisinage de x .

Alors il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_f(x, r) \subset V$ (il existe une boule ouverte centrée sur x incluse dans V par définition, quitte à prendre un rayon plus petit, on peut en déduire l'existence d'une boule fermée).

Puis comme $x \in \overline{O_0} = E$, $\mathcal{B}(x, r) \cap O_0 \neq \emptyset$ (définition de l'adhérence) et de plus il s'agit d'un ouvert par intersection finie d'ouverts.

Donc il existe $x_0 \in \mathcal{B}(x, r)$ et $0 < r_0 < r$ tels que $\mathcal{B}_f(x_0, r_0) \subset \mathcal{B}(x, r) \cap O_0$.

On va désormais construire (x_n) par récurrence, supposons x_n défini, alors :

$x_n \in \overline{O_{n+1}} = E$ et $\mathcal{B}(x_n, r_n)$ est un voisinage de x_n , donc $O_{n+1} \cap \mathcal{B}(x_n, r_n) \neq \emptyset$ et de plus il s'agit d'un ouvert par intersection finie d'ouverts.

Donc il existe $x_{n+1} \in \mathcal{B}(x_n, r_n)$ et $0 < r_{n+1} < \frac{1}{n+1}$ tels que

$\mathcal{B}_f(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset O_{n+1} \cap \mathcal{B}(x_n, r_n)$.

Donc on a construit (x_n) et de plus

$\forall n \in \mathbb{N}, \emptyset \neq \mathcal{B}_f(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \mathcal{B}(x_n, r_n) \subset \mathcal{B}_f(x_n, r_n).$

$(\mathcal{B}_f(x_n, r_n))$ est donc une suite décroissante de fermés non vide dans E complet, avec $\delta(\mathcal{B}_f(x_n, r_n)) = 2r_n < \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

Donc d'après le théorème précédent, il existe $l \in E$ tel que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_f(x_n, r_n) = \{l\}.$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, l \in \mathcal{B}_f(x_n, r_n) \subset O_n \Rightarrow l \in O.$

Et aussi $l \in \mathcal{B}_f(x_0, r_0) \subset \mathcal{B}(x, r) \cap O_0 \subset \mathcal{B}(x, r) \subset V.$

Donc pour tout voisinage V de $x, V \cap O \neq \emptyset,$ donc $x \in \overline{O}.$

Comme c'est vrai pour tout x de $E,$ on a $\overline{O} = E.$

■

En passant au complémentaire, il vient :

Corollaire

Si un espace métrique complet (E, d) s'écrit comme réunion dénombrable de fermés alors au moins un de ces fermés est d'intérieur non vide.

Plus formellement, soit (E, d) un espace métrique complet et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de fermés telle que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ alors $\exists n \in \mathbb{N}, \overset{\circ}{F}_n \neq \emptyset.$

Démonstration :

Supposons par l'absurde $\forall n \in \mathbb{N}, \overset{\circ}{F}_n = \emptyset,$

alors $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{E \setminus F_n} = E \setminus \overset{\circ}{F}_n = E \setminus \emptyset = E,$ donc on peut appliquer le théorème de

Baire aux $E \setminus F_n : \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{E \setminus F_n} = E.$

Or, $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \Rightarrow \emptyset = E \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E \setminus F_n$ et donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{E \setminus F_n} = \overline{\emptyset} = \emptyset.$

D'où une contradiction.

■

On sait qu'une intersection quelconque de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel (on dit qu'il s'agit d'une famille de Moore, et il ne faut pas oublier qu'il faut vérifier que l'intersection vide, c'est-à-dire l'espace en entier, est bien un sous-espace vectoriel) donc lorsque l'on se donne une partie d'un espace vectoriel, le plus petit sous-espace vectoriel contenant cette partie existe.

Soit A une partie de l'espace vectoriel $E,$ on note $\langle A \rangle$ le plus petit sous-espace vectoriel contenant $A,$ et on dit que A engendre $\langle A \rangle.$

Proposition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors toute boule ouverte de E engendre $E.$

Cette proposition n'est plus vraie si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}.$

Démonstration :

Soit $\mathcal{B}(a, r)$ une boule ouverte de E et $F = \langle \mathcal{B}(a, r) \rangle.$

Soit $x \in E \setminus \{a\},$ posons $y = a + \frac{r}{2\|x-a\|}(x-a),$ on a $\|y-a\| = \frac{r}{2} < r,$ donc $y \in \mathcal{B}(a, r).$

Donc $\frac{r}{2\|x-a\|}(x-a) = y-a \in F$ (car $y, a \in F).$

Puis comme $\frac{r}{2\|x-a\|}$ est un scalaire, c'est que $x-a \in F,$ donc il existe $f \in F$ tel que $x-a = f \Rightarrow x = f+a \in F.$

Donc $E \subset F,$ puis comme $F \subset E$ on a $F = E.$

■

On admet que les compacts d'un espace vectoriel de dimension finie sont les fermés bornés. Résultat disponible dans n'importe quel cours.

On en déduit que tout sous-espace vectoriel de dimension fini d'un e.v.n. quelconque est complet : si on se donne une suite de Cauchy dans un sous-espace vectoriel de dimension finie, elle est à termes dans une boule fermée du fait qu'elle soit bornée. Or cette boule, en tant que fermée bornée, est un compact du sous-espace vectoriel (car de dimension finie), et donc on peut extraire une sous suite convergente dans cette boule. Et donc la suite de Cauchy converge vers cette limite incluse dans le sous-espace considéré d'après les propriétés sus-citées.

Il en découle aussi que tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un e.v.n. est fermé :

Proposition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E est complet et donc fermé.

Démonstration de la non complétude de tout e.v.n. de dimension dénombrable :

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. de dimension dénombrable, et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base de E .
Supposons $(E, \|\cdot\|)$ complet.

Alors $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \langle e_1, \dots, e_n \rangle$.

Les $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie, il s'agit donc de fermés d'après ce que l'on vient de voir.

Alors d'après le corollaire du théorème de Baire, un des $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ est d'intérieur non vide et contient donc une boule ouverte, mais alors comme il s'agit au moins du plus petit sous-espace vectoriel engendré par cette boule, c'est que $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = E$, mais alors la dimension de E serait d'au plus n , ce qui est contradictoire. ■

2.2.2

Seconde démonstration : séries dans un e.v.n.

La démonstration ci-dessous, repose sur deux points. Premièrement les sous-espaces vectoriels de dimension finie sont fermés (voir ci-dessus) et deuxièmement si une série à termes dans e.v.n. complet converge absolument alors elle converge simplement (découle de la définition d'une suite de Cauchy appliquée aux sommes partielles).

Le but de la démonstration est donc de construire une série absolument convergente qui ne converge pas simplement.

Démonstrations :

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension dénombrable et $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base de E .

Supposons par l'absurde que E est complet.

Quitte à diviser les éléments de la base par leurs normes, on considère $\forall i \in \mathbb{N}, \|e_i\| = 1$.

On pose $F_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, F_n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$.

Et aussi : $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ puis $\lambda_{n+1} = \frac{1}{3} d(\lambda_n e_n, F_{n-1}) = \frac{1}{3} \inf_{x \in F_{n-1}} \|\lambda_n e_n - x\|$.

Les F_n sont fermés comme sous-espaces vectoriels de dimension finie, donc $d(x, F_n) = 0 \Leftrightarrow x \in F_n$, et donc par construction $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \lambda_n > 0$.

Ensuite on a $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \lambda_{n+1} = \frac{1}{3} d(\lambda_n e_n, F_{n-1}) \leq \frac{1}{3} \|\lambda_n e_n\| = \frac{\lambda_n}{3}$ ($0 \in F_{n-1}$).

On montre donc par récurrence que $\lambda_n \leq \frac{1}{3^n}$.

Donc $\sum_{n \geq 1} \lambda_n e_n$ converge absolument comme série à termes positifs inférieurs à $\frac{1}{3^n}$

(qui converge comme série géométrie de raison $\frac{1}{3} < 1$).

Par hypothèse, on a supposé E complet, on a donc que $\sum_{n \geq 1} \lambda_n e_n$ converge simplement

vers un $x \in E$.

x est un vecteur de E , et s'écrit donc comme combinaison linéaire à support fini d'éléments de la base, c'est-à-dire qu'il existe un n_0 tel que $x \in F_{n_0}$.

Posons $y = \sum_{n \geq n_0+1} \lambda_n e_n = x - \sum_{n \geq 1} \lambda_n e_n \in F_{n_0}$.

Alors :

$$3\lambda_{n_0+2} \leq d(\lambda_{n_0+1}e_{n_0+1}, F_{n_0}) \leq \|\lambda_{n_0+1}e_{n_0+1} - y\| = \sum_{n=n_0+2}^{+\infty} \lambda_n \leq \lambda_{n_0+2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} =$$

$$\frac{3}{2}\lambda_{n_0+2}.$$

Impossible car $\lambda_{n_0+2} \neq 0$.

D'où une contradiction. ■