Définition faisceautique d'une variété

Jean-Baptiste Campesato

7 novembre 2011

Avant-propos

Ce document est le support d'un exposé dont le but est d'introduire les définitions faisceautiques des variétés différentielles et des variétés algébriques.
Nous commençons par présenter de façon informelle la notion géométrique de variété.
Ensuite nous partons de la définition usuelle d'une variété différentielle à l'aide d'un atlas maximal pour introduire les faisceaux d'anneaux et dans le but d'obtenir une caractérisation faisceautique de ces dernières.
Enfin, nous reprenons le modèle de construction faisceautique d'une variété différentielle pour définir la notion de variété algébrique : la majeure partie du travail consiste à définir un modèle local.

Table des matières

1 Variétés : présentation informelle

Une variété de dimension n est, de façon informelle, un espace topologique localement semblable à un espace euclidien de dimension n.
Nous allons dans cette partie illustrer et donner un sens à cette définition au travers de quelques exemples.

1.1 Atlas

Une première façon de construire une variété est de considérer l'espace comme un atlas composé de cartes. La dimension de la variété correspond alors au nombre de paramètres nécessaires pour se repérer localement, c'est-à-dire sur une carte.

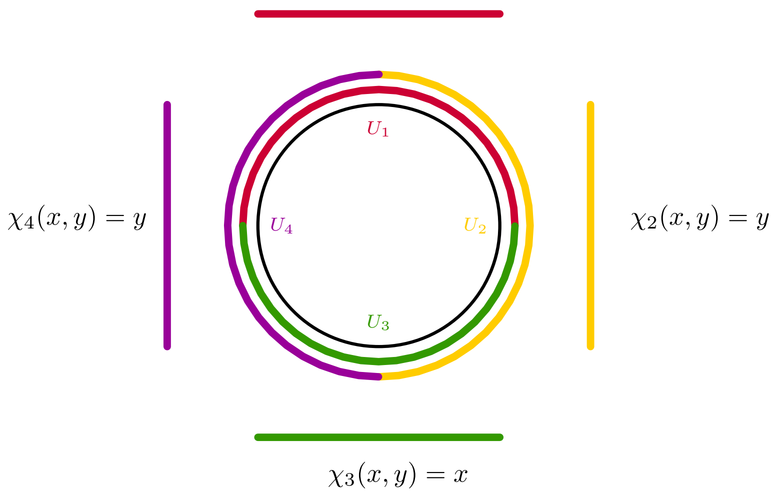
Exemple 1.1 : c'est exactement ce que l'on fait en géographie lorsqu'on utilise un atlas de cartes planes pour représenter la sphère terrestre.

Remarques 1.2 :
- Pour mettre bout à bout les cartes, une redondance de l'information est nécessaire.
- On ne peut pas forcément se ramener à une seule carte, d'où l'intérêt des atlas. Par exemple aucune carte plane ne permet de représenter convenablement la sphère.

Exemple 1.3 : le cercle $S^1 \subset \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1$
a) Un premier atlas :

Localement le cercle ressemble à une ligne, une seule coordonnée suffit :

$$\chi_1 : \begin{array}{ccc} U_1 & \to &]-1,1[\\ (x,y) & \mapsto & x \end{array}$$



Les cartes sont les couples (U_i, χ_i) où χ_i permet de se ramener à l'intervalle $]-1,1[$.
Du fait que les cartes se recouvrent, on a bien une redondance. Par exemple (U_1, χ_1) et (U_4, χ_4) se recouvrent sur le quart de cercle en haut à gauche et sur cette partie on a : $\left\{ \begin{array}{l} \chi_1(x,y) = x \in]-1,0[\\ \chi_4(x,y) = y \in]0,1[\end{array} \right.$.
Toujours sur cette zone, on peut définir une application de changement de cartes qui permet de passer des coordonnées de la première carte aux coordonnées de la quatrième carte : $T_{1\to4}(x) = \chi_4(\chi_1^{-1}(x)) = \chi_4(x, \sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2}$.

■

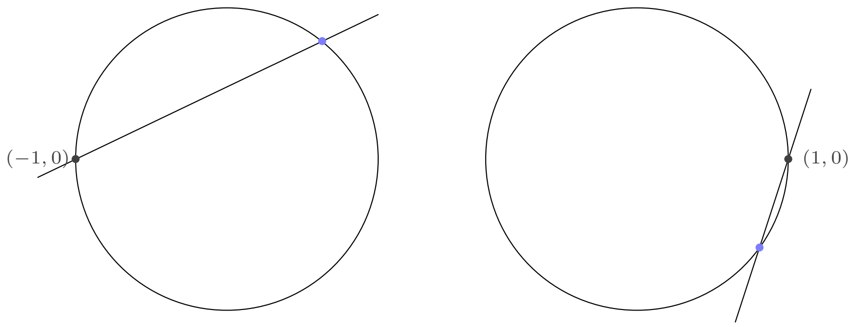
b) un deuxième atlas :

On va se donner deux paramétrisations rationnelles du cercle.

C'est le même procédé qui permet d'obtenir la projection stéréographique de la sphère privée d'un point sur le plan.

Étant donné un point x_0 du cercle, on peut associer à tout autre point x du cercle la pente de la droite qui passe par ces deux points. On obtient ainsi une carte du cercle privé du point x_0.
Donc, en considérant deux points distincts, on en déduit deux cartes qui recouvrent le cercle et donc un atlas du cercle.

Carte 1 | Carte 2



$\chi_1(x,y) = \frac{y}{1+x}$ | $\chi_2(x,y) = \frac{y}{1-x}$

De même on peut définir une application de changement de cartes entre la première et la seconde carte définie sur le cercle privé de $(1,0)$: $T_{1\to 2}(s) = \chi_2\left(\chi_1^{-1}(s)\right) = \chi_2\left(\frac{1-s^2}{1+s^2}, \frac{2s}{1+s^2}\right) = \frac{1}{s}$.

■

1.2 Définition par équations

On peut obtenir une variété en la définissant localement de façon implicite. C'est ce que l'on fait avec les sous-variétés d'un espace vectoriel et c'est avec ce genre de considérations que l'on va définir la notion de variété algébrique.

1.3 Transition

Remarquons qu'il y a d'autres façons d'obtenir des variétés, mais qui ne sont pas nécessaires à la suite du document.
Nous allons d'abord introduire les variétés différentielles via des atlas. Cette définition va nous permettre d'introduire la notion de faisceau d'anneaux que nous utiliserons pour définir les variétés algébriques.

2 Variétés topologiques et différentielles

2.1 Variétés topologiques

Définition 2.1 : variété topologique

Une variété topologique de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ est la donnée d'un espace topologique X et d'un recouvrement $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ de X par des ouverts tels que pour tout $i \in I$, U_i est un ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

2.2 Variétés différentielles

Définition 2.2 : atlas

Un atlas de classe C^p, $p \in \mathbb{N}$, et de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ sur un espace topologique X est la donnée d'un ensemble de couples $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tel que :

(i) $\forall i \in I$, U_i est un ouvert de X et φ_i est un homéomorphisme de U_i sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

(ii) $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

(iii) $\forall i, j \in I$, $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

(iv) $\forall i, j \in I$, $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ est un C^p−difféomorphisme.

$$\begin{tikzcd}
 & U_j \arrow[dl, "\varphi_j"', "\simeq"] & & U_i \arrow[dr, "\varphi_i", "\simeq"'] & \\
\varphi_j(U_j) & & U_i \cap U_j \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] \arrow[dl, "\varphi_j"', "\simeq"] \arrow[dr, "\varphi_i", "\simeq"'] & & \varphi_i(U_i) \\
 & \varphi_j(U_i \cap U_j) \arrow[ul, hook] & & \varphi_i(U_i \cap U_j) \arrow[ur, hook] \arrow[ll, bend left, "{\simeq,\ C^p}", "\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Nomenclature 2.3 :

- Le couple (U_i, φ_i) est *une carte* de l'atlas.
- Si $x \in U_i$, (U_i, φ_i) est *une carte en* x.
- Si $\varphi_i(x) = 0$, (U_i, φ_i) est *une carte centrée en* x.
- Le n−upplet $\varphi_i(x) = (\varphi_{i_1}(x), \dots, \varphi_{i_n}(x))$ représente *les coordonnées locales de* x associées à la carte (U_i, φ_i).
- L'application $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est nommée *application de changement de cartes*.
- Deux atlas sur X sont *compatibles* si leur réunion est encore un atlas sur X, il s'agit d'une relation d'équivalence. Chaque classe d'équivalence admet un représentant privilégié : *l'atlas maximal* obtenu en considérant la réunion de tous les atlas compatibles (qui est encore compatible).

Définition 2.4 : variété différentielle

Une variété différentielle de classe C^p, $p \in \mathbb{N}$, et de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ est la donnée d'un espace topologique X et d'un atlas maximal sur X de classe C^p et de dimension n.

Remarques 2.5 :

- Une variété topologique est une variété différentielle de classe C^0.
- Nous ne savons faire du calcul différentiel que sur des ouverts d'espaces vectoriels normés. L'intérêt des variétés est de pouvoir faire du calcul différentiel localement en se ramenant à des ouverts de $\mathbb{R}^n$ via les cartes. D'où :

Définition 2.6 : application de classe C^k entre deux variétés

Une application $f : X \to Y$ entre deux variétés différentielles est dite de classe C^k en $x \in X$, s'il existe une carte locale (U, φ) de X en x et une carte locale (V, ψ) de Y en $f(x)$ telles que $f(U) \subset V$ et que l'application f lue dans ces cartes soit de classe C^k en $\varphi(x)$, *ie* $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V)$ soit de classe C^k en $\varphi(x)$.

Une application $f : X \to Y$ entre deux variétés différentielles est dite de classe C^k si elle l'est en tout point de X.

Remarques 2.7 :

- La définition est cohérente du fait de la régularité des applications de changement de cartes : elle ne dépend pas du choix des cartes.
- On a même qu'une application $f : X \to Y$ est de classe C^k en x si et seulement si elle est continue en x et si pour tout couple de cartes en x et en $f(x)$ l'application f lue dans ces deux cartes est de classe C^k.
  Ainsi une application entre variétés est de classe C^k si elle est continue et si pour toutes cartes (U, φ) de X et (V, ψ) de Y, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V)$ est de classe C^k.
- Le théorème de composition des applications de classe C^k se généralise aux applications de classe C^k entre deux variétés : soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications de classe C^k entre variétés différentielles, alors $g \circ f : X \to Z$ est encore de classe C^k.

Démonstration des remarques :

• Soient (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) deux cartes en x et (V_1, ψ_1) et (V_2, ψ_2) deux cartes en $f(x)$, $\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1} = \psi_2 \circ \psi_1^{-1} \circ (\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \circ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ de $\varphi_2(U_1 \cap U_2 \cap f^{-1}(V_1 \cap V_2))$ dans $\psi_2(V_1 \cap V_2)$, donc si $\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ est de classe C^k en $\varphi_1(x)$, alors $\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}$ est de classe C^k en $\varphi_2(x)$.
• Facile d'après la définition et en utilisant la démonstration du point précédent...
• Soit $x \in X$, comme f est de classe C^k en x, il existe une carte (U, φ) en x et une carte (V_1, ψ_1) en $f(x)$ telles que $\psi_1 \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V_1)) \to \psi(V)$ soit de classe C^k. Comme g est de classe C^k en $f(x)$, il existe une carte (V_2, ψ_Z) en $f(x)$ et une carte (W, ξ) en $g(f(x))$ telles que $\xi \circ g \circ \psi_2^{-1} : \psi_2(V_2 \cap g^{-1}(W)) \to \xi(W)$ soit de classe C^k. Donc $\xi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\xi \circ g \circ \psi_2^{-1}) \circ (\psi_2 \circ \psi_1^{-1}) \circ (\psi_1 \circ f \circ \varphi^{-1})$ est de classe C^k en $\varphi(x)$.

■

L'idée va désormais être d'introduire la notion de faisceau d'anneaux afin d'obtenir une nouvelle définition des variétés différentielles plus intrinsèque au sens suivant : dans la définition usuelle, on se donne des applications de changement de cartes qui dépendent du recouvrement, le but est de se débarrasser de cette dépendance.

2.3 Définition faisceautique des variétés différentielles

Commençons par l'étude d'un exemple :

Exemple 2.8 :

Soit X une variété différentielle de classe C^p et de dimension n.
Pour tout ouvert U de X, on peut regarder l'ensemble des applications de classe C^p de U dans $\mathbb{R}$, noté $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Alors :

1. $(\Gamma(U, \mathcal{O}_X), +, \cdot)$ est un anneau.
2. Si V est un ouvert de X tel que $V \subset U \subset X$, alors on a un morphisme d'anneaux $\mathrm{res}_V^U : \begin{array}{ccc} \Gamma(U, \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \\ f & \longmapsto & f_{|V} \end{array}$.

■

La notation $\Gamma(U, \mathcal{O}_x)$ provient du fait que l'on peut donner une définition de faisceau d'anneaux en termes de fibrés où $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ est l'ensemble des sections au-dessus de U d'un fibré.

Ces deux points nous mènent à la notion de préfaisceau d'anneaux :

Définition 2.9 : préfaisceau d'anneaux

Un préfaisceau d'anneaux $\mathcal{O}$ sur un espace topologique X est la donnée pour tout ouvert U de X d'un anneau $\Gamma(U, \mathcal{O})$ et pour tout couple d'ouverts $U \subset V$ de X d'un morphisme d'anneaux $\mathrm{res}_U^V : \Gamma(V, \mathcal{O}) \to \Gamma(U, \mathcal{O})$ tels que :

(i) Si $U \subset V \subset W$ sont des ouverts de X alors $\mathrm{res}_U^W = \mathrm{res}_U^V \circ \mathrm{res}_V^W$.

(ii) Pour tout ouvert U de X, res_U^U est l'identité de $\Gamma(U, \mathcal{O})$.

(iii) $\Gamma(\varnothing, \mathcal{O}) = \{0\}$.

Nomenclature 2.10 :
- Les morphismes res_V^U sont nommés *morphismes de restriction.*
- Un élément $s \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ est *une section* de $\mathcal{O}$ au-dessus de U et un élément $s \in \Gamma(X, \mathcal{O})$ est *une section globale* de $\mathcal{O}$.

Remarque 2.11 : un préfaisceau d'anneaux n'est rien d'autre qu'un foncteur contravariant $\mathcal{O}uv(X) \to \mathcal{A}nn$ entre la catégorie des ouverts de X pour les morphismes inclusions et la catégorie des anneaux qui envoie l'objet initial $\varnothing$ sur l'objet terminal $\{0\}$.

Ainsi un morphisme de préfaisceaux d'anneaux sur X n'est rien d'autre qu'un morphisme de foncteurs :

Définition 2.12 : morphisme de préfaisceaux d'anneaux

Soient $\mathcal{O}$ et $\mathcal{P}$ deux préfaisceaux sur un espace topologique X.
Un morphisme de préfaisceaux $\varphi : \mathcal{O} \to \mathcal{P}$ est la donnée pour tout ouvert U de X d'un morphisme d'anneaux $\varphi_U : \Gamma(U, \mathcal{O}) \to \Gamma(U, \mathcal{P})$ tel que si $V \subset U$ sont deux ouverts de X alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \Gamma(U,\mathcal{O}) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\mathrm{res}_V^U"'] & \Gamma(U,\mathcal{P}) \arrow[d, "\mathrm{res}_V^U"] \\ \Gamma(V,\mathcal{O}) \arrow[r, "\varphi_V"'] & \Gamma(V,\mathcal{P}) \end{tikzcd}$$

La notion de préfaisceau va donc nous permettre de donner le caractère local d'une variété différentielle, il faut désormais passer au caractère global en "recollant" les sections comme l'illustre la suite de l'exemple 2.8 :

Exemple (suite) 2.13 :

Si U est un ouvert de X et $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ un recouvrement de U par des ouverts et si pour tout $i \in I$, on a une section $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O})$ de sorte à ce que si $i \neq j$, $f_{i|U_i \cap U_j} = f_{j|U_i \cap U_j}$ alors on montre aisément qu'il existe une unique section $f \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ telle que pour tout $i \in I$, $f_{|U_i} = f_i$.

■

D'où :

Définition 2.14 : faisceau d'anneaux

Un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}$ sur un espace topologique X est un préfaisceau d'anneaux sur X tel que :

(i) Si U est un ouvert recouvert par des ouverts $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ et si une section $s \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ vérifie $\forall i \in I$ $\mathrm{res}^U_{U_i}(s) = 0$ alors $s = 0$.

(ii) Si U est un ouvert recouvert par des ouverts $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ et si pour tout $i \in I$ on a une section $s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O})$ de sorte à ce que pour tous $i, j \in I$ $\mathrm{res}^{U_i}_{U_i\cap U_j}(s_i) = \mathrm{res}^{U_j}_{U_i\cap U_j}(s_j)$ alors il existe une section $s \in \gamma(U, \mathcal{O})$ vérifiant pour tout $i \in I$, $\mathrm{res}^U_{U_i}(s) = s_i$.

Remarque 2.15 : d'après le premier point, la section s du second point est unique.

Caractérisation 2.16

Un préfaisceau d'anneaux $\mathcal{O}$ sur un espace topologique X est un faisceau d'anneaux si et seulement si pour tout ouvert U de X et pour tout recouvrement de U par des ouverts $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ la suite d'applications suivante est exacte :

$$\begin{array}{ccccccc}
\{0\} & \longrightarrow & \Gamma(U,\mathcal{O}) & \xrightarrow{\alpha} & \prod_{i\in I}\Gamma(U_i,\mathcal{O}) & \xrightarrow{\beta} & \prod_{i,j\in I}\Gamma(U_i\cap U_j,\mathcal{O}) \\
& & s & \longmapsto & \left(\mathrm{res}^U_{U_i}(s)\right)_{i\in I} & & \\
& & & & (s_i)_{i\in I} & \longmapsto & \left(\mathrm{res}^{U_i}_{U_i\cap U_j}(s_i) - \mathrm{res}^{U_j}_{U_i\cap U_j}(s_j)\right)_{i,j\in I}
\end{array}$$

Démonstration :

L'injectivité de α est équivalente à 2.17-(i) tandis que $\ker\beta \subset \operatorname{im}\alpha$ est équivalent à 2.18-(ii).

■

Définition 2.19 : espace annelé

Un espace annelé $(X, \mathcal{O})$ est la donnée d'un espace topologique X et d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}$ sur X.

Définition 2.20 : morphisme d'espaces annelés

Un morphisme (φ, φ^*) d'espaces annelés de $(X, \mathcal{O}_X)$ dans $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est la donnée d'une application continue $\varphi : X \to Y$ et pour tout ouvert U de Y d'un morphisme d'anneaux $\varphi^*_U : \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \to \Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$ tels que les φ^*_U soient compatibles avec les restrictions, *ie* pour tous ouverts $V \subset U$ de Y, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(U,\mathcal{O}_Y) \arrow[r, "\varphi^*_U"] \arrow[d, "\mathrm{res}^U_V"'] & \Gamma(\varphi^{-1}(U),\mathcal{O}_X) \arrow[d, "\mathrm{res}^{\varphi^{-1}(U)}_{\varphi^{-1}(V)}"] \\
\Gamma(V,\mathcal{O}_Y) \arrow[r, "\varphi^*_V"'] & \Gamma(\varphi^{-1}(V),\mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}$$

Remarque 2.21 : attention, les anneaux d'un (pré)faisceau d'anneaux ne sont pas forcément des anneaux de fonctions, on ne peut pas forcément précomposer par un morphisme comme c'est le cas dans le point 2.22.

Nous avons vu au travers des exemples 2.8 et 2.13 qu'on pouvait associer à toute variété différentielle X de classe C^p un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ en associant à chaque ouvert U de X l'anneau $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ des applications de classe C^p de U dans $\mathbb{R}$ et à chaque couple d'ouverts $V \subset U$ de X le morphisme de restriction $\mathrm{res}_V^U : \begin{array}{ccc} \Gamma(U, \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \\ f & \longmapsto & f_{|V} \end{array}$.
Dans toute la suite la notation $\mathcal{O}_X$ désignera ce faisceau d'anneaux que l'on nomme *faisceau des fonctions de classe* C^p.
Toujours dans le but de montrer la cohérence de ces notions afin d'obtenir une nouvelle définition des variétés différentielles, vérifions qu'une application de classe C^p entre deux variétés différentielles de classe C^p permet d'obtenir un morphisme d'espaces annelés.
Exemple (suite) 2.22 :

Soient X et Y deux variétés de classe C^p respectivement de dimensions m et n et $f : X \to Y$ une application de classe C^p.
On considère les faisceaux d'anneaux $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_Y$ des fonctions de classe C^p respectivement sur X et Y.
Soit U un ouvert de Y, posons $f_U^* : \begin{array}{ccc} \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) & \longrightarrow & \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X) \\ g & \longmapsto & g \circ f \end{array}$ et vérifions que cette application est bien définie. Si $g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ alors $g \circ f : f^{-1}(U) \xrightarrow{f} U \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ et $g \circ f$ est de classe C^p par composition d'applications entre variétés de classe C^p.
Nous avons donc ainsi un morphisme d'espaces annelés $(f, f^*) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$.

■

Nous allons désormais démontrer que si X est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et si Y est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ alors la réciproque est vraie, *ie* tout morphisme $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ est de cette forme.
Notons que la réciproque est en réalité toujours vraie, c'est ce que l'on verra à la fin de cette partie pour nous assurer de la cohérence de notre nouvelle définition d'une variété faisceautique.

Théorème 2.23

Soient X un ouvert de $\mathbb{R}^m$, Y un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $(f, f^*) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morphisme d'espaces annelés où $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_Y$ sont les faisceaux d'anneaux des applications de classe C^p respectivement de X et Y.
Alors $f : X \to Y$ est une application de classe C^p et les morphismes d'anneaux sont donnés pour tout ouvert U de Y par $f_U^* : \begin{array}{ccc} \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) & \longrightarrow & \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X) \\ g & \longmapsto & g \circ f \end{array}$.

Démonstration :

Voir [1] thm 2.3.2

■

Avant d'obtenir notre nouvelle définition d'une variété différentielle, nous avons besoin d'une dernière proposition :

Proposition-Définition 2.24

Soient X un espace topologique, $\mathcal{O}$ un faisceau d'anneaux sur X et V un ouvert de X.
Alors, on peut définir un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{|V}$ sur V en associant à chaque ouvert $U \subset V$ l'anneau $\Gamma(U, \mathcal{O}_{|V}) = \Gamma(U, \mathcal{O})$.
Le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{|V}$ est *la restriction de* $\mathcal{O}$ *à* V.
Ainsi, si $(X, \mathcal{O})$ est un espace annelé et si V est un ouvert de X, $(V, \mathcal{O}_{|V})$ est encore un espace annelé.

La vérification de cette assertion est immédiate.

Enfin :

Caractérisation 2.25 : définition faisceautique d'une variété différentielle

Une variété différentielle de classe C^p et de dimension n est un espace annelé $(X, \mathcal{O})$ localement isomorphe à des ouverts de $\mathbb{R}^n$ munis des faisceaux des applications de classe C^p sur ces ouverts.

Remarques 2.26 :

- Cette définition a l'avantage de ne pas faire intervenir le choix d'un atlas.
- Dire que $(X, \mathcal{O})$ est localement isomorphe à des ouverts de $\mathbb{R}^n$ munis des faisceaux des applications de classe C^p sur ces ouverts signifie que pour tout $x \in X$, on peut trouver un voisinage ouvert U de x et un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ tels que les espaces annelés $(U, \mathcal{O}_{|U})$ et $(V, \mathcal{O}_V)$ soient isomorphes.

Démonstration :

✦ On a déjà vu comment obtenir un espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ à partir d'une variété différentielle sur X de classe C^p et de dimension n. Cet espace annelé est bien localement isomorphe à des ouverts de $\mathbb{R}^n$ munis des faisceaux des applications de classe C^p : si $x \in X$ et si (U, φ) est une carte en x, on déduit de φ un isomorphisme (φ, φ^*) entre $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ et $(\varphi(U), \mathcal{O}_{\varphi(U)})$ donné pour tout ouvert $V \subset U$ par

$$\varphi_U^* : \begin{array}{ccc} \Gamma(U, \mathcal{O}_{X|U}) & \longrightarrow & \Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathcal{O}_{\varphi(U)}) \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}.$$

Donc une variété différentielle au sens usuel est bien une variété différentielle au sens faisceautique.

✦ Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace annelé localement isomorphe à des ouverts $\mathbb{R}^n$ munis des faisceaux des applications de classes C^p.

Comme pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U_i de x et un isomorphisme d'espaces annelés $(\varphi_i, \varphi_i^*) : (U_i, \mathcal{O}_{X|U_i}) \to (\varphi(U_i), \mathcal{O}_{\varphi(U_i)})$, on a clairement un recouvrement de X par des ouverts $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ avec pour tout $i \in I$ un homéomorphisme $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i)$, pour que les cartes (U_i, φ_i) forment un atlas, il reste à vérifier que les applications de changement de cartes $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ sont de classe C^p : soient $M = \varphi_j(U_i \cap U_j)$, $N = \varphi_i(U_i \cap U_j)$, $\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_{\varphi_j(U_j)|M}$ et $\mathcal{O}_N = \mathcal{O}_{\varphi_i(U_i)|N}$, alors en restreignant les isomorphismes d'espaces annelés (φ_j, φ_j^*) et (φ_i, φ_i^*), on obtient des isomorphismes d'espaces annelés $(\varphi_j, \varphi_j^*) : (U_i \cap U_j, \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}) \to (M, \mathcal{O}_M)$ et $(\varphi_i, \varphi_i^*) : (U_i \cap U_j, \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}) \to (N, \mathcal{O}_N)$, ainsi $(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}, \varphi_j^* \circ \varphi_i^{*-1}) : (N, \mathcal{O}_N) \to (M, \mathcal{O}_M)$ est un isomorphisme d'espaces annelés, donc d'après 2.23, $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est de classe C^p.

■

Caractérisation 2.27 : application de classe C^p

Les applications de classe C^p entre deux variétés différentielles au sens usuel sont les morphismes d'espaces annelés.

Démonstration :

D'après 2.22, les applications de classe C^p sont des morphismes d'espaces annelés.
Réciproquement si $(f, f^*) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ est un morphisme d'espaces annelés entre deux variétés différentielles de classe C^p de dimensions respectives m et n, on peut localement se ramener à un morphisme d'espaces annelés entre $(U, \mathcal{O}_U)$ et $(V, \mathcal{O}_V)$ où U est un ouvert de R^m et V un ouvert de R^n et appliquer 2.23, comme il s'agit d'une propriété locale, f est de classe C^p.

■

Nous allons maintenant pouvoir utiliser les faisceaux d'anneaux pour définir la notion de variété algébrique.

3 Variété algébrique

Pour des raisons de simplicité, nous nous restreindrons ici au cas affine. Notons que ces constructions se généralisent aux variétés *projectives* modulo quelques modifications (Voir [2]).

Les anneaux considérés dans ce document seront tous unitaires et commutatifs, de même $\mathbb{K}$ désignera un corps commutatif.

3.1 Ensemble algébrique affine

Les ensembles algébriques affines sont les sujets d'étude de la géométrie algébrique : on s'intéresse principalement aux courbes formées par le lieu de zéro d'un polynôme.

Définition 3.1 : ensemble algébrique affine

Une partie $V \subset \mathbb{K}^n$, $n \geq 1$, est un ensemble algébrique affine s'il existe $S \subset \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ tel que $V = \{x \in K^n,\, \forall P \in S,\, P(x) = 0\}$.

Remarques 3.2 :

- Pour tout $S \subset \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, nous noterons $V(S) = \{x \in K^n,\, \forall P \in S,\, P(x) = 0\}$ l'ensemble algébrique affine défini par S.
- $V(1) = \varnothing$ et $V(0) = \mathbb{K}^n$.
- Si $n = 1$ et si $S \neq \{0\}$, alors $V(S)$ est fini.
- Un singleton est un ensemble algébrique affine : si $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$,
$$\{a\} = V\left(\prod_{i=1}^{n}(X_i - a_i)\right).$$
- L'application V est décroissante : $S \subset S' \Rightarrow V(S') \subset V(S)$.
- Si on note $< S >= \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i f_i,\, a_i \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n],\, f_i \in S\right\}$ l'idéal engendré par S alors $V(S) = V(< S >)$: $S \subset < S > \Rightarrow V(< S >) \subset V(S)$, réciproquement si $x \in V(S)$, x annule les $f_i \in S$, donc les polynômes de $< S >$.
  On peut donc se restreindre aux idéaux de $K[X_1, \dots, X_n]$.

Proposition 3.3 : topologie de Zariski

Les ensembles algébriques affines de $\mathbb{K}^n$ sont les fermés d'une topologie : la topologie de Zariski.

Toute partie $X \subset \mathbb{K}^n$ hérite de la topologie induite par cette topologie, encore dite de Zariski.

Démonstration :

✦ $V(1) = \varnothing$ et $V(0) = \mathbb{K}^n$.
✦ $\bigcap_{i \in I} V(S_i) = V(\bigcup_{i \in I} S_i)$ (si on se restreint à des idéaux, on peut remplacer leur réunion par leur somme).
✦ En se restreignant aux idéaux, il suffit de montrer que $V(I) \cup V(J) = V(IJ) (= V(I \cap J))$: $IJ \subset I, J \Rightarrow V(I) \cup V(J) \subset V(IJ)$. Pour la réciproque, soit $x \in V(IJ)$, supposons que $x \notin V(I)$ alors il existe $P \in I$, $P(x) \neq 0$, et si $Q \in J$ alors $PQ \in IJ$, donc $PQ(x) = 0 \Rightarrow Q(x) = 0 \Rightarrow x \in V(J)$.

$\blacksquare$

Remarque 3.4 : comme tout singleton est un ensemble algébrique affine et comme toute réunion finie d'ensembles algébriques affines est un ensemble algébrique affine, on a que toute partie finie de $\mathbb{K}^n$ est un ensemble algébrique affine.

Définition-Proposition 3.5 : ouvert standard

Pour tout $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, $D(f) = \mathbb{K}^n - V(f)$ est un ouvert de $\mathbb{K}^n$ pour la topologie de Zariski, nommé *ouvert standard*.
Ces ouverts standards forment une base d'ouverts pour la topologie de Zariski.

Démonstration :

Tout fermé s'écrit $V(I)$ où I est un idéal de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, et comme $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ est noethérien, $I = < f_1, \dots, f_r >$, donc $V(I) = V(< f_1, \dots, f_n >) = V(f_1) \cap \dots \cap V(f_n)$.
Donc tout fermé de la topologie de Zariski s'écrit comme intersection finie de $V(f_i)$ et ainsi tout ouvert s'écrit comme réunion finie de $D(f_i)$.

■

3.2 Fonctions régulières

Nous allons maintenant nous intéresser à la recherche de « bonnes fonctions » sur un ensemble algébrique V, *ie* à la recherche de l'anneau des sections globales afin de pouvoir définir notre modèle local.

Commençons par introduire une opération duale à V :

Définition-Proposition 3.6 : idéal d'une partie de $\mathbb{K}^n$

À une partie $V \subset \mathbb{K}^n$ on associe $I(V) = \{f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n], \forall x \in V, f(x) = 0\}$ l'ensemble des fonctions polynomiales qui s'annulent sur V.
Il s'agit d'un idéal de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ nommé *l'idéal de V*.

Remarques 3.7 :

- Pour tout $V \subset \mathbb{K}^n$, $I(V)$ est bien un idéal de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$: considérons le morphisme d'anneaux res : $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] & \longrightarrow & \mathbb{K}^V \\ f & \longmapsto & f_{|V} \end{array}$ qui à un polynôme associe sa fonction polynomiale restreinte à V, alors $I(V)$ est le noyau de res et est donc bien un idéal.
L'image $\Gamma(V)$ de res est l'ensemble des fonctions polynomiales sur V, il s'agit d'une $\mathbb{K}$-algèbre de type fini (car isomorphe à $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/I(V)$) que l'on nomme *l'algèbre affine de V*.

⚠ L'image $\Gamma(V)$ de res présenté au premier point de 3.7 va jouer un rôle important dans toute la suite.

- L'application I est décroissante.
- Si V est un ensemble algébrique affine, alors $V(I(V)) = V$.
Il est évident que $V \subset V(I(V))$. Pour la réciproque il suffit de remarquer que V peut s'écrire $V(I)$ pour un idéal I et que dans ce cas $I \subset I(V)$, par décroissance il vient $V(I(V)) \subset V(I) = V$.
- Inversement $I \subset I(V(I))$.
⚠ Il n'y a généralement pas égalité :
  - ☞ Lorsque $\mathbb{K}$ n'est pas algébriquement clos, $V(I)$ peut être anormalement petit : regarder le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $I = (X^2 + Y^2 + 1)$ où $(X^2 + Y^2 + 1)$.
  - ☞ L'opération I oublie les puissances : si $n = 2$ et $I = (X^2)$ alors $I(V(I)) = (X) \neq I$.

  Le *Nullstellensatz* (*cf* A.1) permet de donner le lien entre $I(V(I))$ et I lorsque $\mathbb{K}$ est algébriquement clos et d'expliquer ce phénomène lié aux puissances.
- $I(\varnothing) = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$.
- Si $\mathbb{K}$ est infini, $I(\mathbb{K}^n) = \{0\}$.
Ce résultat signifie juste que si une fonction polynomiale est nulle partout alors le polynôme qui lui est associé est aussi nul, ce n'est plus vrai sur un corps fini : regarder

$X^q - X$ sur $\mathbb{F}_q$.
La démonstration se fait par récurrence. L'initialisation pour $n = 1$ est vraie car un polynôme non nul n'a qu'un nombre fini de racines. Pour l'hérédité au rang n, il faut remarquer que tout polynôme non nul et non constant peut s'écrire $P(X) = a_r(X_1, \ldots, X_{n-1})X_n^r + \ldots$ avec $r \geq 1$ et $a_r \neq 0$, ainsi par hypothèse de récurrence on peut trouver $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ qui n'annule pas a_r, ensuite il suffit de remarquer que le polynôme en X $P(x_1, \ldots, x_{n-1}, X)$ a au plus r racines et ne s'annule donc pas pour un certain $x_n \in \mathbb{K}$.

- $I(\{(a_1, \ldots, a_n)\}) = (X - a_1, \ldots, X - a_n)$.
  L'inclusion $\supset$ est évidente. Pour la réciproque, soit $P \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $P(a_1, \ldots, a_n) = 0$, on effectue alors la division euclidienne de P par $(X - a_1)$ (de coefficient dominant inversible), puis celle du reste par $(X - a_2)$ et ainsi de suite, on obtient $P = (X - a_1)Q_1 + (X - a_2)Q_2 + \ldots + (X - a_n)Q_n + c$ avec $c \in \mathbb{K}$, mais $c = P(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

Définition 3.8 : ouvert standard d'un ensemble algébrique affine

Soit V un ensemble algébrique affine, alors les $D_V(f) = V - V(f) = \{x \in V,\ f(x) \neq 0\}$, où $f \in \Gamma(V) \setminus \{0\}$, sont nommés ouverts standards de V et forment une base d'ouverts de V pour la topologie de Zariski.

Définition 3.9 : fonction régulière

Soient $V \subset \mathbb{K}^m$ et $W \subset \mathbb{K}^n$ deux ensembles algébriques affines et $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : V \to W$.
On dit que φ est régulière si ses coordonnées sont polynomiales (*ie* dans $\Gamma(V)$).

Remarques 3.10 :

- On a ainsi une catégorie dont les objets sont les ensembles algébriques affines sur $\mathbb{K}$ et dont les morphismes sont les applications régulières.
- Les fonctions régulières sont continues pour les topologies de Zariski.
- Les éléments de $\Gamma(V)$ sont des applications régulières de V dans $\mathbb{K}$.
- Si $V \subset \mathbb{K}^n$ et $p \leq n$, la projection $\varphi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}) \end{array}$ est régulière.
- Les applications affines sont régulières.
- Les applications affines bijectives de $\mathbb{K}^n$ dans lui-même sont des isomorphismes pour la catégorie définie ci-dessus (elles correspondent aux polynômes de degré 1).
- Considérons la parabole $V = V(Y - X^2)$ alors $\varphi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array}$ est un isomorphisme de réciproque $x \mapsto (x, x^2)$.
- La fonction régulière $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & V(Y^2 - X^3) \\ t & \longmapsto & (t^2, t^3) \end{array}$ est bijective mais n'est pas un isomorphisme (cela découle de 3.11).

Proposition 3.11

Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, le foncteur contravariant

$$\begin{array}{ccc} V & \longmapsto & \Gamma(V) \\ \varphi : V \to W \text{ regulière} & \longmapsto & \begin{array}{ccc} \Gamma(W) & \longrightarrow & \Gamma(V) \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array} \end{array}$$

entre la catégorie des ensembles algébriques affines sur $\mathbb{K}$ et la catégorie des $\mathbb{K}-$algèbres de type fini réduites est une équivalence de catégories.

Pour plus de détails, voir [2], chapitre I, §6.

3.3 Variété algébrique affine

Nous allons désormais définir notre modèle local comme nous l'avons fait pour la définition faisceautique des variétés différentielles. On cherche donc à obtenir un faisceau de « bonnes fonctions » sur un ensemble algébrique affine $V \subset \mathbb{K}^n$ et on peut souhaiter que l'anneau des sections globales soit celui des fonctions régulières $\Gamma(V)$.

Un premier lemme va nous permettre de définir notre faisceau d'anneaux seulement sur notre base d'ouverts.

Lemme 3.12

Soient X un espace topologique, $\mathbb{K}$ un corps et $\mathcal{U}$ une base d'ouverts de X tels que pour tout ouvert $U \in \mathcal{U}$ on ait un sous-anneau $\mathcal{F}(U)$ de l'anneau des fonctions de U dans $\mathbb{K}$ vérifiant :

(i) Si $U, V \in \mathcal{U}$ avec $V \subset U$ et si $s \in \mathcal{F}(U)$, alors $s_{|V} \in \mathcal{F}(V)$.

(ii) Si $U \in \mathcal{U}$ est recouvert par des ouverts $U_i \in \mathcal{U}$, $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, et si on a pour tout $i \in I$ une fonction $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ telle que si $i, j \in I$, $i \neq j$, $s_{i|U_i \cap U_j} = s_{j|U_i \cap U_j}$ alors il existe $s \in \mathcal{F}(U)$ vérifiant pour tout $i \in I$, $s_i = s_{|U_i}$.

Alors il existe un unique faisceau d'anneaux $\mathcal{O}$ sur X tel que pour tout $U \in \mathcal{U}$, $\Gamma(U, \mathcal{O}) = \mathcal{F}(U)$.

Démonstration :

Soit U un ouvert de X, alors U est recouvert par des ouverts $U_i \in \mathcal{U}$ et on pose $\Gamma(U, \mathcal{O}) = \{s : U \to K,\ s_{|U_i} \in \mathcal{F}(U_i)\}$.
On vérifie facilement que la définition de $\Gamma(U, \mathcal{O})$ est indépendante du choix du recouvrement et qu'on définit bien un faisceau d'anneaux.

■

Pour définir notre faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_V$ sur V, on cherche donc à définir les anneaux $\Gamma(D_V(f), \mathcal{O}_V)$, $f \in \Gamma(V) \setminus \{0\}$. Or sur $D_V(f)$, f ne s'annule pas, on peut donc souhaiter ajouter aux sections sur $D_V(f)$ de $\mathcal{O}_V$, outre les fonctions regulières de $\Gamma(V)$, l'inverse $\frac{1}{f}$ de f. On pose donc $\Gamma(D_V(f), \mathcal{O}_V) = \Gamma(V)_f$ le localisé de $\Gamma(V)$ en f (voir B.4).
Pour pouvoir appliquer le lemme 3.12, on doit cependant identifier $\Gamma(V)_f$ à un anneau de fonctions dans $\mathbb{K}$:

Lemme 3.13

Pour tout $f \in \Gamma(V) \setminus \{0\}$, $\Gamma(V)_f$ s'identifie à un sous-anneau de l'anneau des fonctions $D_V(f)$ dans $\mathbb{K}$.

Démonstration :

Soit le morphisme de restriction $r : \Gamma(V) \to \mathbb{K}^{D_V(f)}$ où $\mathbb{K}^{D_V(f)}$ désigne l'anneau des applications de $D_V(f)$ dans $\mathbb{K}$ et $i : \begin{array}{ccc} \Gamma(V) & \longrightarrow & \Gamma(V)_f \\ s & \longmapsto & \frac{s}{1} \end{array}$.
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r(f^n)$ est inversible (car $\frac{1}{f^n}$ est bien définie sur $D_V(f)$ car $f^n \neq 0$ sur $D_V(f)$), d'après la propriété universelle (voir B.3) r se factorise en $r = \rho \circ i$, où $\rho : \Gamma(V)_f \to \mathbb{K}^{D_V(f)}$.
Montrons que le morphisme ρ est injectif : si $\rho\left(\frac{s}{f^n}\right) = 0$ alors s est nulle sur $D_V(f)$ donc sf est nulle sur V, ce qui signifie que $\frac{s}{f^n}$ est nulle dans le localisé. Ainsi $\Gamma(V)_f$ s'identifie à son image par ρ.

■

Nous avons besoin de supposer le corps algébriquement clos pour pouvoir utiliser le Nullstellensatz (A.1).

Définition-Proposition 3.14 : faisceau d'anneaux des fonctions régulières

Soit V un ensemble algébrique affine sur un corps algébriquement clos, pour toute fonction $f \in \Gamma(V) \setminus \{0\}$, on pose $\Gamma(D_V(f), \mathcal{O}_V) = \Gamma(V)_f$.
On définit ainsi, d'après le lemme 3.12, un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_V$ sur V, nommé *faisceau d'anneaux des fonctions régulières sur* V ou *faisceau structural de* V.

Démonstration :

Il faut vérifier que l'on respecte bien les hypothèses de 3.12 :
☞ Restriction : Si $D_V(f) \subset D_V(g)$ alors $V(g) \subset V(f)$. Ainsi d'après le Nullstellensatz (A.1) $f \in I(V(f)) \subset I(V(g)) = \sqrt{(g)}$, donc il existe $h \in \Gamma(V)$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $f^n = gh$.
Si $\frac{u}{g^i} \in \Gamma(V)_g$, sa restriction à $D_V(f)$ peut s'écrire $\frac{uh^i}{g^i h^i} = \frac{uh^i}{f^{ni}} \in \Gamma(V)_f$.
☞ Recollement : dire que $D_V(f)$ est recouvert par des $D_V(f_i)$ revient à dire que $V(f) = \cap V(f_i) = V(I)$ où I est l'idéal engendré par les f_i, mais par noethérianité on peut supposer que I est engendré par un nombre fini de f_i. On peut donc supposer que $D_V(f)$ est recouvert par un nombre fini de $D_V(f_i)$.
Supposons que l'on ait des sections s_i sur $D_V(f_i)$ coïncidant sur les intersections $D_V(f_i) \cap D_V(f_j) = D_V(f_i f_j)$. Comme les s_i sont en nombre fini, ils peuvent s'écrire $s_i = \frac{a_i}{f_i^n} \in \Gamma(V)_{f_i}$ pour un même $n \in \mathbb{N}$. Et comme ils coïncident sur les $D_V(f_i) \cap D_V(f_j) = D_V(f_i f_j)$, d'après l'injection de ρ dans 3.13 appliquée à $D_V(f_i f_j)$, $\frac{a_i}{f_i^n} = \frac{a_j}{f_j^n}$ dans $\Gamma(V)_{f_i f_j}$, *ie* il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $f_i^N f_j^N (a_i f_j^n - a_j f_i^n) = 0$ sur $D_V(f_i) \cap D_V(f_j)$ (comme on a un nombre fini de couples, on peut prendre le même N pour tous les couples (i,j), $i \neq j$). La relation précédente reste vraie sur $D_V(f)$ car $f_i^N f_j^N$ est nulle en dehors de $D_V(f_i f_j) = D_V(f_i) \cap D_V(f_j)$.
Comme f est nulle sur $V(f_1, \ldots, f_r) = V(f_1^{n+N}, \ldots, f_r^{n+N})$, d'après le Nullstellensatz (A.1), $f \in \sqrt{(f_1, \ldots, f_r)}$, *ie* il existe $m \in \mathbb{N}$ et des $b_j \in \Gamma(V)$ tels que $f^m = \sum_{j=1}^{r} b_j f_j^{n+N}$ (✧).

(✧) Si l'on a un recouvrement de V en entier, alors on obtient la relation $1 = \sum b_j f_j^n$ qui est un analogue algébrique aux partitions de l'unité de l'analyse.

Si on écrit $s = \frac{a}{f^m} \in \Gamma(V)_f$ où $a = \sum_{j=1}^{r} a_j b_j f_j^N$ alors on a bien $s_{|D_V(f_i)} = s_i$ *ie* $\frac{a}{f^m} = \frac{a_i}{f_i^n}$ dans $\Gamma(V)_{f_i}$ car $f_i^N(a f_i^n - a_i f^m) = \sum_{j=1}^{r} b_j (f_i^N f_j^N (a_j f_i^n - a_i f_j^n)) = 0$ sur $D_V(f_i)$.

Comme $\Gamma(V)$ n'est pas forcément intègre, nous devons utiliser la définition générale de la localisation d'un anneau.

Afin d'être rigoureux, on peut vérifier que si un ouvert a deux écritures $D_V(f_1) = D_V(f_2)$ alors les anneaux $\Gamma(V)_{f_1}$ et $\Gamma(V)_{f_2}$ sont égaux à l'aide du même argument que pour la restriction.

■

Définition 3.15 : variété algébrique affine

Une variété algébrique affine est un espace annelé isomorphe à un espace annelé $(V, \mathcal{O}_V)$ où V est un ensemble algébrique affine sur un corps algébriquement clos et $\mathcal{O}_V$ le faisceau d'anneaux des fonctions régulières sur V.
Un morphisme de variétés algébriques affines est un morphisme d'espaces annelés par précomposition.

Remarque 3.16 : Pour les morphismes de variétés algébriques affines, on ne conserve que les morphismes d'espaces annelés par précomposition, c'est-à-dire les morphismes (φ, φ^*) où les morphismes d'anneaux φ_U^* s'obtiennent par précomposition par φ.

L'intérêt des variétés algébriques affines par rapport aux ensembles algébriques affines est que la définition est plus intrinsèque au sens où les variétés algébriques sont indépendantes de tout plongement dans $\mathbb{K}^n$.
On peut par exemple montrer que si V est un ensemble algébrique affine et si $f \in \Gamma(V) \setminus \{0\}$,

alors $D_V(f)$ est une variété algébrique affine pour le faisceau $\mathcal{O}_{V|D_V(f)}$ (*cf* [2], chapitre III, 3.3).

Proposition 3.17

Si X et Y sont deux ensembles algébriques affines et $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_Y$ leurs faisceaux des fonctions régulières, alors on a les bijections naturelles :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}ar}((X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y)) \simeq \mathrm{Reg}(X,Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}-\mathrm{alg}}(\Gamma(Y),\Gamma(X))$$

où $\mathrm{Reg}(X,Y)$ est l'ensemble des fonctions régulières de X dans Y.

Démonstration :

La seconde bijection découle de l'aspect pleinement fidèle de 3.11.
Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme de variétés algébriques, notons $\eta_1,\dots,\eta_m : Y \subset \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$ les applications coordonnées.
Alors $\eta_i \in \Gamma(Y) = \Gamma(Y,\mathcal{O}_Y)$, donc $\eta_i \circ \varphi \in \Gamma(\varphi^{-1}(Y),\mathcal{O}_X) = \Gamma(X,\mathcal{O}_X) = \Gamma(X)$, ainsi $\varphi = (\eta_1\circ\varphi,\dots,\eta_m\circ\varphi)$ est régulière.
Réciproquement si $\varphi : X \to Y$ est régulière. Soit $D_Y(g)$ un ouvert standard de Y.
Si $f = \frac{h}{g^n} \in \Gamma(D_V(g),\mathcal{O}_Y)$, alors $f\circ g = \frac{\varphi^*(h)}{\varphi^*(g)^n}$ donc $g\circ\varphi \in \Gamma(D_V(\varphi^*(g)),\mathcal{O}_X) = \Gamma(\varphi^{-1}D(g),\mathcal{O}_X)$.
Donc on a bien un morphisme de variétés algébriques.

■

3.4 Variété algébrique

Maintenant que nous avons notre modèle local, nous allons pouvoir définir la notion de variété algébrique comme pour les variétés différentielles :

Définition 3.18 : variété algébrique

Une variété algébrique est un espace annelé quasi-compact où le faisceau d'anneaux est un faisceau d'anneaux de fonctions et qui est localement isomorphe à une variété algébrique affine.
Un morphisme de variétés algébriques est un morphisme d'espaces annelés par précomposition.

Remarques 3.19 :

- Dire que $(X,\mathcal{O}_X)$ est localement isomorphe à une variété algébrique affine signifie que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $(U,\mathcal{O}_{X|U})$ soit isomorphe à une variété algébrique affine.
- Les variétés algébriques affines sont bien quasi-compactes et sont donc bien des variétés algébriques.
- Les ouverts d'une variété algébrique isomorphes à une variété algébrique affine sont nommés *ouverts affines* et forment une base d'ouverts. Plus précisément tout ouvert d'une variété algébrique est réunion finie d'ouverts affines (donc est quasi-compact) (voir [2], chapitre III, 4.3).
- On déduit du point précédent, qu'étant donnée une variété algébrique $(X,\mathcal{O}_X)$ et U un ouvert de X, alors les sections de $\Gamma(U,\mathcal{O}_X)$ sont des applications continues à valeurs dans $\mathbb{K}$ muni de la topologie de Zariski.

3.5 Pour aller plus loin : les schémas

Comme sujet d'ouverture, nous allons brièvement présenter une notion encore plus souple, celle de *schéma*. Il s'agit de l'objet de base de la géométrie algébrique.
Soit A une $\mathbb{K}-$algèbre de type fini alors $A = \mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]/I$ et on considère $X = V(I) \subset \mathbb{K}^n$

muni de la topologie de Zariski. On dispose de la base d'ouverts usuelle $D(f)$ où $f \in A$. On définit un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ en posant $\Gamma(D(f), \mathcal{O}_X) = A_f$. On obtient un faisceau différent de celui de la partie précédente car on considère I et non plus $\sqrt{I}$: si $I \neq \sqrt{I}$ alors l'anneau A n'est pas réduit, *ie* contient des nilpotents.
Un schéma affine d'anneau A est alors $(X, \mathcal{O}_X)$, que l'on note $\mathrm{spec}(A)$.
Un schéma est alors un espace annelé localement isomorphe à un schéma affine.
On remarque alors que si le schéma est réduit (ie les anneaux $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ ne contiennent pas de nilpotent non-nul) alors il s'agit simplement d'une variété.

Certains auteurs comme Neeman ([1]) reproduisent directement le travail de la partie précédente à l'ensemble $\mathrm{spec}(A)$ des idéaux premiers de A :
L'équivalence de catégories 3.11 permet d'identifier les points d'un ensemble algébrique affine aux idéaux maximaux de la $\mathbb{K}$-algèbre associée. On en déduit une topologie de Zariski sur les idéaux maximaux que l'on généralise aux idéaux premiers sur $\mathrm{spec}(A)$.
Le faisceau d'anneaux ainsi obtenu n'est plus un faisceau de fonctions : on a un objet plus général qu'une variété algébrique affine.
De plus les anneaux du faisceau d'anneaux sont locaux : on a donc un espace localement annelé.
On définit donc un morphisme d'espaces localement annelés comme un morphisme d'espaces annelés dont les morphismes d'anneaux sont des morphismes d'anneaux locaux. Un schéma affine est alors un espace localement annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ isomorphe à $(\mathrm{spec}(A), \mathcal{O})$ pour une certaine $\mathbb{K}-$algèbre A.
Un schéma est alors un espace localement annelé localement isomorphe à un schéma affine.

Les notions usuelles de la géométrie algébrique sur les variétés algébriques s'étendent facilement aux schémas et ces derniers sont indispensables dans l'étude de certaines questions comme les intersections.

A Le Nullstellensatz

Le *Nullstellensatz* ou *théorème des zéros de Hilbert* est un théorème fondamental de la géométrie algébrique : il permet d'établir un dictionnaire algèbre↔géométrie en donnant des équivalences entre des propriétés sur $I(V)$ et $\Gamma(V)$ et des propriétés de V, où V est un ensemble algébrique affine (voir [2], chapitre I, §4).

On rappelle que si I est un idéal d'un anneau A commutatif, alors on note $\sqrt{I} = \{a \in A,\ \exists n \in \mathbb{N},\ a^n \in I\}$ le radical de I, il s'agit encore d'un idéal.

Théorème A.1 : Nullstellensatz ou théorème des zéros de Hilbert

Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos.
Pour tout idéal $I \subset \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$, on a $I(V(I)) = \sqrt{I}$.

On démontre usuellement le Nullstellensatz en se ramenant à un cas particulier :

Lemme A.2 : Nullstellensatz (version faible)

Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos.
Si I est un idéal de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ distinct de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ alors $V(I) \neq \varnothing$.

Cette version faible revient à dire, par contraposée, que lorsque $I = < f_1, \ldots, f_r >$ vérifie $V(I) = \varnothing$, alors il existe des polynômes g_i tels que $\sum_{i=1}^{r} g_i f_i = 1$. Il s'agit bien d'un cas particulier du Nullstellensatz, car alors $\sqrt{I} = I(V(I)) = I(\varnothing) = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$, donc $1 \in \sqrt{I}$, donc $1 \in I$.

Le fait de supposer $\mathbb{K}$ algébriquement clos permet d'assurer que les ensembles algébriques affines ne sont pas trop petits : si $n \geq 2$ et si $P \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ n'est pas constant, alors $V(P) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n,\ P(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$ est infini.

Démontrons le résultat par récurrence :

☞ Au rang $n=2$, P peut s'écrire $P(X,Y)=\sum_{i=0}^{d} a_i(Y)X^i$ où $d=\deg P$ et $a_i \in \mathbb{K}[Y]$.

✦ Premier cas : s'il existe $i>0$, $a_i \neq 0$.
L'ensemble $V=\{y \in \mathbb{K},\, a_i(y)=0\}$ est fini donc son complémentaire $C=\mathbb{K}\setminus V$ est infini (car un corps algébriquement clos est infini).
Soit $y_0 \in C$, alors $P(X,y_0)$ est un polynôme non constant et admet donc au moins une racine x_{y_0} car le corps est algébriquement clos.
Ainsi $\{(x_{y_0},y_0),\, y_0 \in C\}$ est infini et inclus dans $V(P)$.

✦ Second cas : si $P(X,Y)=a_0(Y)$.
Par hypothèse $\deg a_0 \geq 1$. Comme le corps est algébriquement clos, il existe $y_0 \in \mathbb{K}$ tel que $a_0(y_0)=0$. Ainsi $\{(x,y_0),\, x \in \mathbb{K}\}$ est infini et inclus dans $V(P)$.

☞ Pour l'hérédité, supposons la propriété vraie pour un certain rang n et soit $P \in \mathbb{K}[X_1,\dots,X_{n+1}]$.
On peut écrire $P(X_1,\dots,X_{n+1})=\sum_{0\leq i_1+\ldots+i_n\leq d} a_{i_1,\dots,i_n}(X_{n+1})X_1^{i_1}\dots X_n^{i_n}$.

✦ Premier cas : s'il existe $i=(i_1,\dots,i_n)\neq(0,\dots,0)$ tel que $a_i \neq 0$.
Il existe alors un $x_0 \in \mathbb{K}$ tel que $a_i(x_0)\neq 0$ (on peut soit remarquer que d'après 3.7 si un polynôme sur un corps infini est non nul, sa fonction polynomiale ne l'est pas non plus, ou réutiliser le même argument qu'à l'initialisation : a_i a un nombre fini de racines mais $\mathbb{K}$ est infini).
Puis $P(X_1,\dots,X_n,x)$ est non constant, donc admet une infinité de racines par hypothèse de récurrence.
Ainsi P admet une infinité de racines.

✦ Second cas : $P(X_1,\dots,X_{n+1})=a_{0,\dots,0}(X_{n+1})$ non constant et c'est immédiat comme à l'initialisation.

■

Remarques A.3 :

- On a utilisé le fait qu'un corps algébriquement clos est forcément infini.
  La contraposée de ce résultat est facile à obtenir : si $\mathbb{K}=\{x_1,\dots,x_q\}$, alors $P(X)=(X-x_1)\dots(X-x_n)+1$ n'a aucune racine dans $\mathbb{K}$.
- On a déjà vu, en 3.7, que si un polynôme P sur un corps infini est non nul, alors sa fonction polynomiale ne l'est pas non plus : il existe $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $P(x_1,\dots,x_n)\neq 0$.

B Localisation

L'idée va être de rendre inversibles certains éléments d'une partie d'un anneau, or si a et b sont inversibles, il en est de même pour ab d'inverse $b^{-1}a^{-1}$, on commence donc par introduire la définition suivante :

Définition B.1 : partie multiplicative d'un anneau

Une partie S d'un anneau A est dite multiplicative si $1 \in S$ et si pour tout $a,b \in S$, $ab \in S$.

Définition B.2 : localisation

Soit S une partie multiplicative d'un anneau intègre.
On pose sur $A\times S$ la relation d'équivalence $(a,s)\mathcal{R}(a',s') \Leftrightarrow as'=a's$ et on note $\frac{a}{s}$ la classe de (a,s).
On définit *le localisé de A par S* comme l'anneau A_S (ou $S^{-1}A$, ou $A[S^{-1}]$) obtenu par le quotient $A\times S/\mathcal{R}$ pour les lois de composition $\frac{a}{s}+\frac{a'}{s'}=\frac{as'+a's}{ss'}$ et $\frac{a}{s}\cdot\frac{a'}{s'}=\frac{aa'}{ss'}$.

Remarques B.3 :

- Si $S = A \setminus \{0\}$, on retrouve le corps des fractions de A.
- On a un morphisme d'anneaux injectif $i : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_S \\ a & \longmapsto & \frac{a}{1} \end{array}$. L'image par i d'un élément de S est inversible et A_S est universel pour cette propriété : si un morphisme d'anneaux $f : A \to B$ vérifie $f(S) \subset B^*$ alors il existe un unique morphisme $g : A_S \to B$ tel que $f = g \circ i$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i"'] & B \\ & A_S \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

  Intuitivement c'est le plus petit anneau contenant A et les inverses des éléments de S.
- Le localisé se généralise à un anneau commutatif unitaire non-intègre, mais il faut alors, pour la transitivité, poser la relation $(a, s)\mathcal{R}(a', s') \Leftrightarrow \exists t \in S,\ t(as' - a's) = 0$. Le morphisme i n'est généralement plus injectif : son noyau est formé des éléments annulés par un élément de S. La propriété universelle reste valable. Rappelons qu'il n'y a plus de corps des fractions dans ce cas.

Exemple B.4 : si A est intègre, si $f \in A$ et si $S = \{f^n, n \in \mathbb{N}\}$ alors on note $A_f = A_S$ et $A_f \simeq A[T]/(fT - 1)$: c'est l'ensemble des fractions qui peuvent s'écrire comme le quotient d'un élément de A par une puissance positive de f.
Lorsque l'on enlève l'hypothèse A intègre, f est nilpotent si et seulement si A_f est l'anneau nul.

Expliquons maintenant brièvement le choix du terme *localisation :*
Si p est un idéal premier alors $A \setminus p$ est multiplicative et on peut donc localiser A en cette partie, on note alors $A_p = A_{A \setminus p}$ et on parle du localisé de A en p. L'anneau A_p obtenu admet alors un seul idéal maximal, on dit que A_p est un anneau local (*cf* B.5).
Lorsque A est intègre, l'idéal nul est premier, et on retrouve bien que $A \setminus \{0\}$ est multiplicative.
Revenons-en au choix du terme *localisation* : si on considère le localisé de $\mathbb{C}[X]$ en l'idéal maximal (X), on trouve l'anneau des polynômes dans lequel on a autorisé toutes les divisions sauf celles par des polynômes qui s'annulent en 0 : il permet ainsi de s'intéresser aux propriétés des polynômes au voisinage de 0.

Définition B.5 : anneau local

Un anneau commutatif A est dit local s'il admet un unique idéal maximal $\mathfrak{m}$.

Remarques B.6 :

- Dans ce cas les éléments de $A \setminus \mathfrak{m}$ sont inversibles.
- On nomme corps résiduel d'un anneau local le corps $A/\mathfrak{m}$.
- En géométrie algébrique ces anneaux s'identifient aux fonctions définies au voisinage d'un point.
- Tout corps commutatif est un anneau local d'idéal maximal (0).
- Un morphisme d'anneaux locaux est un morphisme d'anneaux qui envoie l'idéal maximal sur l'idéal maximal.

Références

[1] Amnon Neeman. *Algebraic and Analytic Geometry.* London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2007.

[2] Daniel Perrin. *Géométrie algébrique, une introduction.* Savoirs actuels. EDP Sciences, 1995.