Le petit théorème de Picard

Aladin VIRMAUX

Travail réalisé sous la direction de M. Henry De Thelin dans le cadre du M1 de Mathématiques Fondamentales et Appliquée de l'Université Paris XI.

1 Introduction

On va présenter ici une démonstration du *Petit théorème de Picard* : les fonctions entières non constantes ont pour image $\mathbb{C}$ oté d'au plus un point. Il s'agit donc d'une amélioration conséquente du théorème de Liouville, qui lui annonce que toute fonction entière non constante est non bornée. Le théorème doit son nom au mathématicien français Charles Émile Picard (1856 - 1941), qui le démontra en 1879.

On peut améliorer encore ce dernier théorème par le *Grand théorème de Picard*, qui affirme non seulement que l'image est $\mathbb{C}$ oté d'au plus un point, mais également que tous les points de l'image ont une infinité d'antécédents par notre fonction entière. La démonstration de ce dernier est beaucoup plus compliquée, et nous n'en parlerons pas ici.

2 Espace hyperbolique

Définition 2.1. *Le modèle du* demi-plan de Poincaré *consiste à identifier le plan hyperbolique complexe à*

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\},$$

de bord à l'infini

$$\partial_\infty \mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = 0\} \cup \{\infty\}.$$

Les géodésiques sont les demi-cercles perpendiculaires à la droite réelle.

Les isométries de $\mathbb{H}^2$ sont exactement les homographies $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc > 0$. En effet ce sont les seules homographies qui préservent l'axe réel et son orientation. Ce sont les homographies engendrées par les endormorphismes de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de déterminant positif.
On notera aussi Π^+ le demi-plan supérieur du plan complexe, c'est à dire

$$\Pi^+ = \{z \in \mathbb{X},\ \Im(z) > 0\}.$$

Définition 2.2. *On appelle* $SL_2^+(\mathbb{Z}) = \{\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ *et* $ad - bc = 1\}$ *muni de la loi de composition.*

C'est bien un groupe car $id \in SL_2^+(\mathbb{Z})$, et pour tout $\varphi \in SL_2^+(\mathbb{Z})$, $z \mapsto \varphi^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a} \in SL_2^+(\mathbb{Z})$.

Proposition 2.3. *Pour tout* $\varphi \in SL_2(\mathbb{Z})$, $\varphi(\Pi^+) = \Pi^+$.

Preuve : Comme a, b, c, d sont réels, alors $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, et $\Im(\varphi(i)) = (c^2 + d^2)^{-1} > 0$. □

Définition 2.4. *Soit un sous-groupe* Γ *de* $Iso(\mathbb{H}^2)$*, un* domaine fondamental *de* Γ *est un polygône convexe infini* $\mathcal{D}$ *tel que*

– $\forall \gamma \in \Gamma, \gamma \neq id, \gamma\mathcal{D} \cap \mathcal{D} = \emptyset$
– $\mathbb{H}^2 = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma\mathcal{D}$.

Définition 2.5.

$$\Gamma(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2^+(\mathbb{Z}), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod 2 \right\}.$$

On va poser, pour toute la suite, le sous groupe G de $\Gamma(2)$ engendré par

$$\sigma(z) = \frac{z}{2z+1}, \qquad \tau(z) = z + 2.$$

τ est une translation horizontale, et on peut remarquer que σ envoie le cercle $|2z+1| = 1$ sur le cercle $|2z-1| = 1$.

Il est clair que $\sigma,\ \tau \in \Gamma(2)$. On va même démontrer que $G = \Gamma(2)$, mais passer par les générateurs rend la proposition suivante beaucoup plus facile à démontrer.

Soit Ω la partie de Π^+ qui est constituée des $z = x + iy \in \mathbb{C}$ qui satisfont :

$$y > 0, \qquad |x| \leq 1, \qquad |2z+1| \geq 1, \qquad |2z-1| > 1.$$

C'est à dire la partie de $\mathbb{C}$ limitée par les deux bandes verticales $x = 1$ et $x = -1$, et par deux demi-cercles de rayon 1/2 qui ont pour centre -1/2 et 1/2.

Proposition 2.6. Ω *est un domaine fondamental de* $\Gamma(2)$.

Preuve : On va vérifier successivement les différentes points de la définition 2.4. Nous allons d'abord montrer $\forall \gamma \in \Gamma(2), \gamma \neq id, \gamma\mathcal{D} \cap \mathcal{D} = \emptyset$, et ensuite que $\bigcup_{\gamma \in G} \gamma\mathcal{D} = \mathbb{H}^2$.

Comme nous l'avions déjà remarqué, $G \subseteq \Gamma(2)$. L'inclusion réciproque découle de la démonstration générale. En effet, s'il existait $\pi \in \Gamma(2) \setminus G$, alors $\pi\mathcal{D} \cap \bigcup_{\gamma \in G} \gamma\mathcal{D} = \emptyset$, ce qui contredit le deuxième point.

Étape 1 : On va montrer que $\forall \gamma \in G$, $\gamma\mathcal{D} \cap \mathcal{D} = \emptyset$. Pour cela on va démontrer que si $z \in \mathcal{D}$ et $\gamma z \in \mathcal{D}$ avec $\gamma \in G \setminus \{id\}$, alors $z \in \partial\mathcal{D}$ et $\gamma z \in \partial\mathcal{D}$.

On va traiter trois cas séparément, en ayant toujours en tête la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qui représente γ.

– Si $c = 0$, alors $ad = 1 \Rightarrow a = d = \pm 1$, donc $\gamma(z) = z + 2m$ avec $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, et alors γ est une translation horizontale. On a donc $|\Re(z)| = |\Re(\gamma z)| = 1$.
– Si $c = 2d, c \neq 0, ad - bc = 1$ i.e. $d(a - 2b) = 1$. Donc $d = \pm 1$ et $a = 2b \pm 1$. $\gamma(z) = \frac{az+b}{2dz+d} = \frac{az+b}{d(2z+1)} = \pm b \pm \sigma(z)$. Or $\sigma(\mathcal{D}) \subseteq \overline{D}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, avec b entier.
– $c \neq 0, c \neq 2d$, alors $|cz + d| > 1$. Supposons le contraire, c'est à dire $|cz + d| \leq 1$, et donc $|z + d/c| \leq \frac{1}{|c|}$, c'est à dire que le disque de centre $-d/c$ et de rayon $1/|c|$ intersecte $\mathring{\mathcal{D}}$. Il existe alors un $z \in \{0, 1, -1\}$ tel que $|cz + d| < 1$. Or $cz + d$ pour z comme précédemment est un entier impair, on a donc une contradiction et $|cz + d| > 1$.
  Comme $\Im(z) < \Im(\gamma z)$ pour tout $z \in \mathcal{D}$ et que G est un groupe, alors $\Im(z) = \Im(\gamma^{-1}\gamma z) < \Im(z)$.

Étape 2 : Il reste à montrer que $\bigcup_{\gamma \in G} \gamma\mathcal{D} = \mathbb{H}^2$.

Soit $\gamma \in G$ et $z \in \mathbb{H}^2$. On va montrer que chaque orbite de $z \in \mathcal{D}$ sous l'action de G admet un élément de partie réelle maximale. Ceci va principalement découler du lemme suivant :

Lemme 2.7. *On prend σ comme ci dessus, alors* $\Im(\sigma z) = \frac{\Im(z)}{|2z+1|^2}$.

Preuve du lemme :

On écrit $z = x + iy$, alors

$$\Im(z+2) = \Im(z),$$

et

$$\Im\left(\frac{z}{2z+1}\right) = \Im\left(\frac{z(2\bar{z}+1)}{|2z+1|^2}\right) = \Im\left(\frac{z}{|2z+1|^2}\right).$$

$\diamond$

Soit $z \in \Pi^+$, alors si on se donne une borne $M > 0$, il existe un nombre fini d'homographies $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de G tel que $|cz + d|^2$ soit inférieur à M. Il existe donc un $\gamma_0 \in G$ tel que $|cz + d|^2$ soit minimal. Et donc d'après le lemme précédent,

$$\forall \gamma \in G, \ \Im(\gamma z) \leq \Im(\gamma_0 z).$$

Chaque orbite Gz contient alors un élément de partie imaginaire maximale, par exemple $\gamma_0 z$ pour $\gamma_0 \in G$ et $z \in \mathbb{H}^2$. Posons alors $z' = \gamma_0 z$. Pour tout n, $\sigma\tau^{-n}(z') = \frac{2z'-n}{2z'-4n+1}$. Et comme $\gamma_0 z$ est de partie imaginaire maximale dans Gz, on a $|2z' - 4n + 1| \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. De même, en considérant $\sigma^{-1}\tau^{-n}$, on vérifie que $|2z' - 4n - 1| \geq 1$.
Or, comme σ envoie $|2z + 1| = 1$ sur $|2z - 1| = 1$, $\bigcup\limits_{\gamma \in G} \gamma\mathcal{D}$ contient :

$$z \in \Pi^+ \text{ tel que } \forall m \in \mathbb{Z}, \ |2z - (2m + 1)| \geq 1.$$

Donc $z' \in \bigcup\limits_{\gamma \in G} \gamma\mathcal{D}$, et $z = \gamma_0^{-1} z'$, ce qui conclut la démonstration. $\square$

3 Prolongement analytique

On va donner tout d'abord quelques définitions, pour formaliser et comprendre la notion de prolongement analytique le long des courbes. Le but de cette section est de donner une importante caractérisation des espaces simplements connexes, le théorème de monodromie (théorème 3.10). Il découle de l'étude des prolongements analytiques d'une fonction holomorphe le long des courbes.

Définition 3.1. *Un* élément fonctionnel *noté (f, D) est la donnée d'un disque ouvert D et d'une fonction holomorphe f sur D.*

Définition 3.2. *On dit que deux éléments fonctionnels (f_0, D_0) et (f_1, D_1) sont des* prolongements directs *l'un de l'autre si $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$ et $\forall z \in D_0 \cap D_1$, $f_0(z) = f_1(z)$. Si cette dernière condition est vérifiée, on note*

$$(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1).$$

On en profite également pour donner la définition d'un prolongement le long d'une *chaîne* $\mathcal{C}$.

Définition 3.3. *Une* chaîne $\mathcal{C}$ *est une suite **finie** $\{D_0, ..., D_n\}$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $D_{i-1} \cap D_i \neq \emptyset$. S'il existe, étant donné une chaîne $\mathcal{C}$ et (D_0, f_0), et pour tout $i = 1, ..., n$ un élément fonctionnel (f_i, D_i) tel que $(f_{i-1}, D_{i-1}) \sim (D_i, f_i)$, alors on dit que la famille $\{(f_i, D_i)\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un* prolongement analytique de (f_0, D_0) le long de $\mathcal{C}$.

On peut même montrer un résultat d'unicité sur le prolongement :

Proposition 3.4. *Avec les mêmes notations que la définition précédente, f_n est uniquement déterminé par la donnée de f_0.*

Preuve : $(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1)$ et comme $D_0 \cap D_1$ est un ouvert connexe (non vide !), f_1 est uniquement déterminée. On en déduit l'unicité sur toute la chaîne par récurrence immédiate. $\square$

Le prolongement direct ne définit cependant pas une relation d'équivalence, en effet elle n'est pas transitive. Par exemple on peut considérer trois disques D_0, D_1, D_2 de rayon 1 et de centres $1, j, j^2$ (j est une racine cubique de l'unité). On considère alors trois fonctions $f_j \in \mathcal{H}(D_j)$ telle que $f_j^2 = z$ et $(D_0, f_0) \sim (D_1, f_1)$ et $(D_1, f_1) \sim (D_2, f_2)$. Si maintenant on regarde $D_0 \cap D_2$ qui n'est pas vide, on a $f_2 = -f_0 \neq f_0$. Ici, on ne peut pas appliquer la proposition précédente car on peut changer l'ordre des termes et conserver une chaîne valide.

Cependant, la proposition suivante permet de donner une pseudo transitivité, sous condition :

Proposition 3.5. *Si $D_0 \cap D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, $(D_0, f_0) \sim (D_1, f_1)$ et $(D_1, f_1) \sim (D_2, f_2)$, alors $(D_0, f_0) \sim (D_2, f_2)$.*

Preuve. Ceci découle de la connexité de $D_0 \cap D_2$ (intersection en deux disques). Comme $f_0 = f_1$ dans $D_0 \cap D_1$ et $f_1 = f_2$ dans $D_1 \cap D_2$, on a $f_0 = f_2$ dans l'ouvert $D_0 \cap D_1 \cap D_2 \subset D_0 \cap D_2$. Donc $f_0 = f_2$ sur $D_0 \cap D_2$. $\square$

On va maintenant introduire la notion de *prolongement le long d'une courbe*.

Définition 3.6. *On dit qu'une chaine* $\mathcal{C} = \{D_0, ..., D_n\}$ *recouvre une courbe* $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ *si*

$$\gamma^* \subset \bigcup_{i \in [\![1,n]\!]} D_i.$$

On peut alors énoncer un théorème important de cette partie :

Théorème 3.7. *Soit* (f, D) *un élément fonctionnel, et* γ *une courbe tel que* $\gamma(0)$ *soit le centre de D. Alors l'élément* (f, D) *admet au plus un prolongement analytique le long de* γ.

L'unicité peut se traduire plus précisément par le fait que si deux chaines recouvrent la même courbe λ, et qu'on peut prolonger f le long de λ suivant ces deux chaînes, alors les deux prolongements coïncident sur les intersections des deux chaines.

Preuve : On considère deux chaines $\mathcal{C}_1 = \{A_0, ..., A_m\}$ et $\mathcal{C}_2 = \{B_0, ..., B_n\}$, $A_0 = B_0 = D$. On peut trouver deux suites $0 = s_0 < ... < s_m = 1 = s_{m+1}$ et $0 = \sigma_0 < ... < \sigma_n = 1 = \sigma_{n+1}$ telles que pour tout $i \leq n$ et $i \leq m$,

$$\lambda([s_i, s_{i+1}]) \subset A_i, \qquad \lambda([\sigma_j, \sigma_{j+1}]) \subset B_j.$$

Par hypothèse, on peut prolonger f sur les deux chaînes, et donc il existe des éléments fonctionnels (g_i, A_i) et (h_j, B_j) tels que $(g_i, A_i) \sim (g_{i+1}, A_{i+1})$ et $(h_j, B_j) \sim (h_{j+1}, B_{j+1})$ pour $i \leq m - 1$ et $j \leq n - 1$ avec $h_0 = g_0$.

On veut montrer que si $[s_i, s_{i+1}] \cap [\sigma_j, \sigma_{j+1}] \neq \emptyset$ alors on peut passer d'une chaine à l'autre, plus précisément on veut $(g_i, A_i) \sim (h_j, B_j)$.

Ceci découle par l'absurde de la proposition 3.5. En effet supposons qu'il existe des couples (i, j) pour lesquels ceci serait faux, on peut alors supposer (i, j) tel que $i + j > 0$ soit minimal parmis tous ces couples. Supposons sans perte de généralité que $s_i \geq \sigma_j$. Alors $\lambda(s_i) \in A_{i-1} \cap A_i \cap B_j$, en particulier cette intersection est non vide.

Comme $i + j$ est minimale, $(g_{i-1}, A_{i-1}) \sim (h_j, B_j)$ et $(g_{i-1}, A_{i-1}) \sim (g_i, A_i)$. La proposition 3.5 montre alors que $(g_i, A_i) \sim (h_j, B_j)$ d'où la contradiction. □

On aimerait étendre ces théorèmes aux homotopies. On va introduire des *familles de courbes* que l'on définit comme suit :

Définition 3.8. *Soit* α,β *deux points d'un espace topologique X,* $\varphi : [0, 1]^2 \to X$ *continue telle que* $\varphi(0, t) = \alpha$ *et* $\varphi(1, t) = \beta$ *pour tout* $t \in [0, 1]$. *On définit alors une* famille de courbe de α vers β, $(\lambda_t)_{t\in[0,1]}$ *avec*

$$\forall (s, t) \in [0, 1]^2, \lambda_t(s) = \varphi(s, t).$$

φ est continue sur un compact, et donc uniformément continue sur $[0, 1]^2$, on peut aussi remarquer que φ est tout simplement une homotopie de λ_0 à λ_1.

Théorème 3.9. *Soit* $(\lambda_t)_{t\in[0,1]}$ *une famille de courbes de* α *vers* β*, D un disque de centre* α*, et supposons que l'élément fonctionnel* (f, D) *peut être prolongée analytiquement le long de chaque* λ_t *en* (g_t, D_t)*, alors* $g_0 = g_1$.

C'est à dire que $(g_0, D_0) \sim (g_1, D_1)$ avec D_0 et D_1 deux disques de même centre β.

Preuve : Ce théorème découle du théorème précédent et de la compacité de $[0, 1]^2$.

Soit $t \in [0, 1]$, il existe par hypothèse une chaine $\mathcal{C} = \{A_0, ..., A_n\}$ recouvrant λ_t avec $A_0 = D$ et telle que (g_t, D_t) soit obtenue comme prolongement analytique de (f, D) le long de $\mathcal{C}$. Comme précédement, il existe une suite finie $0 = s_0 < ... < s_n = 1$ telle que $E_i = \lambda_t([s_i, s_{i+1}]) \subset A_i$ pour tout $i < n$.
On utilise maintenant la continuitée uniforme de φ sur $[0, 1]^2$ (théorème de Heine) :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall |u - t| < \delta, \ |\lambda_t(s) - \lambda_u(s)| < \epsilon \quad \forall s \in [0, 1].$$

On choisit $\epsilon > 0$ de telle sorte que $\mathcal{C}$ recouvre λ_u (on prend par exemple ϵ inférieur à la plus petite distance entre les E_i et le complémentaire de A_i) . Le théorème 3.7 montre alors que $g_t = g_u$ vu qu'elles sont toutes deux obtenues par prolongement de (f, D) le long de cette même chaine.

On va maintenant pouvoir utiliser la compacité : on peut en effet recouvrir $[0, 1]$ par des ouverts $J_t \ni t$ tels que $\forall u \in J_t, \ g_t = g_u$. Par compacité on peut alors en extraire un recouvrement fini, et alors obtenir $g_0 = g_1$ en appliquant un nombre fini de fois la proposition 3.5. □

On a maintenant toutes les clefs en main pour démontrer le théorème fondamental suivant :

Théorème 3.10 (Monodromie)**.** *Soient Ω un domaine simplement connexe, $D \subset \Omega$ de centre z_0 et (f, D) un élément fonctionnel. Si (f, D) peut-être analytiquement prolongé sur toute courbe dans Ω qui débute en z_0, alors il existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $\forall z \in D$, $g(z) = f(z)$.*

Preuve : On se donne la encore deux points α et β, α centre d'un disque D dans le domaine Ω. λ_1 et λ_2 deux courbes de Ω de α vers β. On a besoin du lemme évident suivant :

Lemme 3.11. *Soient Γ_1 et Γ_2 deux courbes d'un espace topologique X simplement connexe, de point initial commun α et de point final commun β. Alors il existe une famille de courbes $(\lambda_t)_{t\in[0,1]}$ telle que $\lambda_0 = \Gamma_0$ et $\lambda_1 = \Gamma_1$.*

On construit alors une famille de courbes entre λ_1 et λ_2 et on applique le théorème 3.9. Les deux prolongements définissent le même élément fonctionnel (g_β, D_β) où D_β est un disque centré en β. Soit $\eta \in \Omega$ tel que $D_\eta \cap D_\beta \neq \emptyset$, alors on peut prolonger d'abord (f, D) à β puis à η ce qui donne que $g_\eta = g_\beta$ pour $z \in D_\eta \cap D_\beta$.

On peut alors sans ambiguité définir $g(z) = g_\eta(z)$ pour $z \in D_\eta$, ce qui démontre bien le théorème. □

4 Principe de réflexion de Schwarz

Dans cette section, nous démontrerons le principe de symétrie du à Riemann dont Schwarz donnera une forme plus rigoureuse, ce qui lui vaudra de donner son nom à ce principe.

On commence par démontrer un lemme qui est intuitivement évident :

Lemme 4.1. *Soit D_1 et D_2 deux domaines complexes tels que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ et $\overline{D_1} \cap \overline{D_2} = \gamma$. Si $f_1 \in \mathcal{H}(D_1)$ et $f_2 \in \mathcal{H}(D_2)$ prolongeables par continuité respectivement sur $\overline{D_1}$ et $\overline{D_2}$ avec*

$$\forall z \in \gamma,\ f_1(z) = f_2(z), \qquad \gamma \text{ frontière rectiligne},$$

alors la fonction $f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{si } z \in D_1 \cup \gamma \\ f_2(z) & \text{si } z \in D_2 \end{cases}$ *est holomorphe sur le domaine $D_1 \cup D_2 \cup \gamma$.*

Preuve : Par le théorème de Morera, il suffit de montrer que l'intégrale de f le long de tout triangle de $D_1 \cup D_2 \cup \gamma$ est nulle. Soit Δ un triangle, les cas $\Delta \subset D_1$ et $\Delta \subset D_2$ étant triviaux, il reste à vérifier le cas où $\Delta \cap \gamma \neq \emptyset$.

Si on coupe le triangle Δ en Δ_1 et Δ_2, triangles dans respectivement D_1 et D_2. Cela revient à montrer que l'intégrale sur les deux trapèze de même base sur γ de chaque côté de la frontière et de hauteur arbitrairement petite tend vers 0, ce qui s'obtient par l'hypothèse des prolongements qui coïncident sur γ. □

On peut maintenant démontrer le principe de reflexion qui n'est, ici, pas présenté en toute généralité. On le démontre dans le cas où la frontière est l'axe des réels, on peut en déduire le cas général sous des hypothèses légèrements plus larges en composant par une homographie.

Théorème 4.2 (Principe de reflexion de Schwarz)**.** *Soient D_1 et D_2 deux domaines symétriques par rapport à $\gamma \subset \partial D_1 \subseteq \mathbb{R}$, et D_1^* symétrique à D_2^* par rapport à $\gamma^* \subset \partial D_1^* \subseteq \mathbb{R}$. Si $f : \overline{D_1} \to \overline{D_1^*}$ telle que $f(\gamma) = \gamma^*$ est un un homéomorphisme qui soit conforme sur D_1, alors on peut prolonger f de façon unique en une application qui envoie conformément $D_1 \cup D_2 \cup \gamma$ sur $D_1^* \cup D_2^* \cup \gamma^*$.*

Il faut supposer que f se prolonge par continuité sur $\overline{D_1}$ dans $\overline{D_1^*}$ tel que le prolongement continue soit un homéomorphisme (en particulier bijectif). En fait, ceci est toujours vrai car f est une application conforme, par le théorème de Carathéodory que nous ne démontrerons pas ici. Ici nous pouvons rajouter cette hypothèse au théorème, sans conséquence pour la suite.

Preuve : On commence par définir la fonction $g : z \in D_2 \mapsto \overline{f(\overline{z})} \in D_2^*$. Par hypothèse, g est une application conforme. On va alors montrer que les hypothèses du lemme 4.1 sont vérifiées.
Par hypothèse, si on se donne $x \in \gamma$, comme f est prolongeable par continuité à γ, alors de même g est prolongeable par continuité à γ car $\overline{\gamma} = \gamma$. On remarque aussi que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Par application du lemme on définit ainsi une application conforme h de $D_1 \cup D_2 \cup \gamma$ sur $D_1^* \cup D_2^* \cup \gamma^*$ par

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in D_1 \cup \gamma \\ g(z) & \text{si } z \in D_2 \end{cases}.$$

□

5 Frontière et applications conformes

Précédemment nous avons fait une remarque sur le théorème de Carathéodory, que nous allons seulement énoncer ici :

Théorème 5.1. *Soit D et D^* des domaines limités par des courbes de Jordan ∂D et ∂D^*. Toute application conforme f de D ans D^* peut être prolongée à ∂D en un homéomorphisme de $\overline{D}$ dans $\overline{D}^*$.*

Nous avons besoin, pour la suite, d'une forme affaiblie de ce théorème. Nous allons le montrer rigoureusement pour des domaines limites par des frontières simples, c'est à dire pour des domaines limités par des frontières suffisement régulières. En effet, notre domaine fondamental $\mathcal{D}$ est limité par deux bandes verticales, et deux demi-cercle, ce qui constituera un cadre satisfaisant d'application du théorème.

Commencons par définir ce qu'est un *point frontière simple* :

Définition 5.2. *Soit Ω un domaine simplement connexe du plan complexe. On dit qu'un point $\alpha \in \partial\Omega$ est un* point frontière simple *de Ω si pour toute suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \alpha$, il existe une courbe γ paramétrée sur* $[0, 1]$ *et une suite $(t_n)_{t\in\mathbb{N}}$ strictement croissante telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ \gamma(t_n) = \alpha_n$.*

Cela veut tout simplement dire qu'il existe une courbe qui passe par tous les α_n et qui se termine en α.

Nous pouvons alors prolonger les applications conformes en un point frontière simple. Admettons le théorème suivant. Sa démonstration est technique et fait appel à la continuité radiale de l'intégrale de Poisson.

Théorème 5.3. *Soit Ω un domaine borné simplement connexe du plan, et $f : \Omega \to U$ une application conforme. Si α est un point frontière simple de Ω, alors f admet un prolongement continue injectif sur* $\Omega \cup \{\alpha\}$.

On peut alors démontrer le cas particulier du théorème de Carathéodory qui nous interesse :

Théorème 5.4. *Soit Ω un domaine borné et simplement connexe du plan dont tous les points frontières sont simples. Alors toute application conforme de Ω sur U peut se prolonger en un homéomorphisme de $\overline{\Omega}$ sur $\overline{U}$.*

Preuve : Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ injective dans U. D'après le théorème 5.3 ont peut prolonger continûment f de $\overline{\Omega}$ sur $\overline{U}$. En effet pour tout $z \in \overline{\Omega}$, si (α_n) une suite de Ω qui converge vers z, $f(\alpha_n) \to f(z)$. Si on considère maintenant une suite (z_n) de $\overline{\Omega}$ qui converge vers z, alors il existe des points α_n tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ |\alpha_n - z_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(\alpha_n) - f(z_n)| < \frac{1}{n}$
Donc $\alpha_n \to z_n$ pour tout n, et donc $f(\alpha_n) \to \underline{f}(z)$, d'où $\underline{f}(z_n) \to f(z)$.
Le prolongement de f est donc continue sur $\overline{\Omega}$, $U \subset f(\overline{\Omega}) \subset \overline{U}$ et par compacité de $\overline{U}$, $f(\overline{\Omega}) = \overline{U}$.

Le théorème précédent montrer que le prolongement ainsi obtenu est injectif, et définit sur un compact. Donc elle admet une application réciproque continue, d'où l'homéomorphisme. □

Cependant, notre domaine fondamental sur lequel nous voulons appliquer ce théorème n'est pas borné. Heureusement, nous pouvons nous ramener, par des homographies, à un domaine borné vérifiant bien toutes les hypothèses du théorème précédent, on a le corollaire :

Corollaire 5.5. *Soit Ω un domaine simplement connexe du plan, donc tous les points frontières sont simples et tel que $S^2 \setminus \Omega$ (où S est la sphère de Riemann) soit d'intérieure non vide. Alors toute application conforme de Ω sur U peut se prolonger en un homéomorphisme de $\overline{\Omega}$ sur $\overline{U}$.*

Preuve : Il suffit de prendre une bonne homographie et d'appliquer le théorème précédent. Comme par hypothèse, $S^2 \setminus \Omega$ est d'intérieur non vide, on prend z un point intérieur et on choisit une homographie h qui envoit z sur ∞. L'image de Ω par h est bien une partie du plan bornée satisfaisant toutes les hypothèses du théorème 5.4 □

6 Construction d'une fonction modulaire

Définition 6.1. *Soit Γ un sous groupe du groupe des homographies. Une fonction $f \in \mathcal{H}(\Pi^+)$ est dite* modulaire *si*

$$\forall\varphi \in \Gamma,\ f \circ \varphi = f.$$

On va donc construire une fonction modulaire, ceci va découler des résultats obtenus dans les sections précédentes :

Théorème 6.2. *Il existe $\lambda \in \mathcal{H}(\Pi^+)$ modulaire tel que λ soit injective sur $\mathcal{D}$, et* $\lambda(\mathcal{D}) = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Démonstration. On va noter $\mathcal{D}^+$ la moitié droite de notre domaine fondamental $\mathcal{D}$. C'est à dire les complexes de $\mathcal{D}$ de partie réelle positive. Comme $\mathcal{D}^+$ et Π^+ sont simplements connexes, d'après le théorème de l'application conforme de Riemann et le théorème 5.4 on peut construire un homéomorphisme h de $\overline{\mathcal{D}^+}$ sur Π^+, injectif sur $\mathcal{D}^+$, tel que $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$. Par le principe de reflexion, on étend h sur $\{z \in \mathcal{D} \backslash \Re z < 0\}$, $h(-x + iy) = \overline{h(x + iy)}$. Alors h est conforme de l'intérieur de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ et l'image de $\overline{\mathcal{D}}$ par h est $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ car h est réelle sur la frontière de $\mathcal{D}$, positive à gauche, négative sur l'axe vertical en 0. On a alors immédiatement les relations :

$$h(1 + iy) = h(\tau(-1 + iy)), \qquad h(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{i\theta}) = h(\sigma(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{i\theta})).$$

On définit maintenant la fonction λ, on pose :

$$\lambda(z) = h(\varphi^{-1}(z)) \qquad (\varphi \in \Gamma(2),\ z \in \varphi(\mathcal{D})).$$

Par la définition du groupe fondamental (on justifie ainsi la construction), pour tout $z \in \Pi^+$, il existe une unique fonction $\varphi \in \Gamma(2)$ tel que $z \in \varphi(\mathcal{D})$. λ est alors bien définie sur Π^+. Il est alors clair que λ est injective sur $\mathcal{D}$ et $\lambda(\mathcal{D}) = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.
Par les relations précédentes, λ est injective et continue sur $\mathcal{D} \cup \tau^{-1}(\mathcal{D}) \cup \sigma^{-1}(\mathcal{D})$. Si on se donne O un ouvert contenant $\mathcal{D}$, alors 4.1 montre que λ est holomorphe sur O. Comme $\Pi^+ = \bigcup_{\varphi \in \Gamma(2)} \varphi(O)$, et comme $\lambda \circ \varphi = \lambda$, alors $\lambda \in \mathcal{H}(\Pi^+)$. □

On ne peut pas prolonger λ sur un ouvert contenant strictement Π^+. En effet, si on se donne φ une homographie, alors $\varphi(0) = b/d$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, les zéros de la fonction $z \mapsto \lambda(z) - \frac{b}{d}$ s'accumuleraient et la fonction serait constante. Ce qui impliquerait que λ soit nulle par le théorème des zéros isolés.

7 Le petit théorème de Picard

Théorème 7.1 (Petit théorème de Picard)**.** *L'image de toute fonction holomorphe non constante et entière est* $\mathbb{C}$ *ôté d'au plus un point.*

Preuve : Soit f une fonction entière, c'est à dire holomorphe sur $\mathbb{C}$. On va supposer qu'il existe deux nombres α et β qui ne sont pas dans l'image de f, et montrer qu'alors f est constante. On peut supposer sans perte de généralité que $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ quitte à remplacer f par $\frac{f-\alpha}{f-\beta}$.

Soit D un disque de Ω auquel on peut associer $V_1 \in \Pi^+$ (déterminé par la donnée de $\varphi \in \Gamma(2)$), $\lambda : V_1 \to D_1$ bijective. Chacun de ces V_1 rencontre au plus deux des domaines de $\varphi(\mathcal{D})$. Pour chaque choix de V_1 il existe une fonction $\psi_1 \in \mathcal{H}(D_1)$ telle que $(\psi_1 \circ \lambda)(z) = z$.

Maintenant si on choisit un autre disque D_2 dans Ω, disjoint de D_1 alors on peut trouver V_2 tel que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Ainsi, les éléments fonctionnels (ψ_1, D_1) et (ψ_2, D_2) sont des prolongements analytiques directs l'un de l'autre. Si on se donne un disque $A_0 \subset \mathbb{C}$, centré en 0, tel que $f(A_0) \subseteq D_0 \subset \Omega$. On choisit alors, comme précédemment, ψ_0 holomorphe sur D_0 et on pose

$$\forall z \in A_0,\ g(z) = \psi_0(f(z)).$$

Nous allons montrer que par le théorème de monodromie, cette fonction g s'étend en une fonction entière à image dans Π^+.

Soit γ une courbe du plan quelconque, partant de 0. Par image continue d'un compact, l'image de $f \circ \gamma$ est un sous ensemble compact de Ω. On peut donc recouvrir γ par un nombre fini de disques $\{A_0, ..., A_n\}$ centrés en $\{0, x_1, ..., x_n\}$ tels que $\forall i \leq n,\ A_i \subset D_i \subset \Omega$, de sorte qu'il existe pour tout i une application $\psi_i \in \mathcal{H}(D_i)$ prolongement direct de (x_{i-1}, D_{i-1}). Ce qui donne un prolongement analytique le long de la chaine $\{A_0, ..., A_n\}$.

Donc par le théorème de monodromie (3.10), g est prolongeable en une fonction entière, on remarque que la partie imaginaire de son image est toujours positive en vertu de ce qui précède. Comme g est à valeur dans Π^+, la fonction $\frac{g-i}{g+i}$ est bornée et donc constante par le théorème de Liouville. Comme ψ_0 est bijective sur $f(A_0)$, on en conclut que f est constante. □

Le théorème ne peut être amélioré, par exemple, la fonction exponentielle est entière et surjective dans $\mathbb{C}^*$.

On peut cependant étendre le précédent théorème aux fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$:

Théorème 7.2 (Picard)**.** *L'image de toute fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$ oté d'au plus deux points.*

Preuve : Comme précédement on va supposer qu'une fonction méromorphe g ne prend jamais les valeurs $a,\ b,\ c \in \mathbb{C}$. Ce sont des valeures finies, sinon par le théorème précédent g serait entière et donc constante.
Si on pose $f(z) = \frac{1}{g(z)-c}$, cette fonction est entière et ne prend pas les valeures $\frac{1}{a-c}$ et $\frac{1}{b-c}$, et donc par le premier théorème de Picard, f est constante, d'où g constante. $\square$

Là encore la borne est optimale, en effet la fonction tangente ne prend jamais les valeurs i et $-i$.

Références

[Cha90] B. Chabat, *Introduction à l'analyse complexe*, Editions Mir Moscou, 1990.

[Rud98] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, 1998.