

Problème

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E . Nous notons E^* l'ensemble des formes linéaires sur E , ie l'ensemble des applications linéaires $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$. Remarquer que E^* est un espace vectoriel pour les lois usuelles sur l'espace des applications de E dans \mathbb{K} . On appelle E^* l'espace dual de E .

Partie I

I-1. Soient $E_i = \text{vect}(e_i)$, $F_i = \text{vect}(\mathcal{B} \setminus \{e_i\})$ et $\pi_i : E \rightarrow E_i$ la projection sur E_i associée à la somme directe $E = E_i \oplus F_i$. On note $e_i^* : E \rightarrow \mathbb{K}$ l'application définie par : $\forall x \in E$, $e_i^*(x) = [\pi_i(x)]_{(e_i)}$.

Montrer que e_i^* est l'application définie par : $\forall i_1, \dots, i_n \in I, \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} e_i^*\left(\sum_{j=1}^n a_j \cdot e_{i_j}\right) &= 0, \text{ si } i \notin \{i_1, \dots, i_n\} \\ e_i^*\left(\sum_{j=1}^n a_j \cdot e_{i_j}\right) &= a_k, \text{ si } i = i_k, k \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Montrer que $e_i^* \in E^*$.

Soit D l'application définie par :

$$\begin{aligned} D : \quad E &\rightarrow E^* \\ x = \sum_{j=1}^n a_j \cdot e_{i_j} &\mapsto \sum_{j=1}^n a_j \cdot e_{i_j}^* \end{aligned}$$

On notera $D(x)$ par x^* , de sorte que $D(e_i) = e_i^*$.

I-2. Montrer D est une application linéaire.

I-3. Montrer que D est injective. En déduire que $\dim(E^*) < \infty \Rightarrow \dim(E) < \infty$.

I-4. On suppose ici que E est de dimension finie et on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $\varphi \in E^*$. On note $\varphi(e_i) = \epsilon_i$. Montrer que $(\sum_{j=1}^n \epsilon_j \cdot e_j)^* = \varphi$.

I-5. Montrer que : $\dim(E) < \infty \Leftrightarrow \dim(E^*) < \infty$, et que dans ce cas E et E^* sont isomorphes et que $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* . On dit que \mathcal{B}^* est la **base duale** de \mathcal{B} .

On suppose maintenant que $\dim(E) = \infty$.

I-6. On veut montrer que D n'est pas surjective. Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ l'application définie par $\varphi(\sum_{j=1}^n a_j \cdot e_{i_j}) = \sum_{j=1}^n a_j$. Montrer que φ est linéaire, mais que $\varphi \notin \text{Im}(D)$.

I-7. Étant donnés deux ensembles A et B , on note B^A l'ensemble des applications de A dans B . En particulier \mathbb{K}^I est le \mathbb{K} -espace des applications de I dans \mathbb{K} . Soit $f : E^* \rightarrow \mathbb{K}^I$ l'application définie de la façon suivante, $\forall \varphi \in E^*$:

$$\begin{aligned} f(\varphi) : \quad I &\rightarrow \mathbb{K} \\ i &\mapsto f(\varphi)(i) = \varphi(e_i) \end{aligned}$$

Montrer que f est un isomorphisme.

*** I-8.** Montrer qu'il existe une injection de $\{0, 1\}^I$ dans \mathbb{K}^I , mais pas d'injection de $\{0, 1\}^I$ dans I . En conclure que lorsque $\dim(E) = \infty$, E et E^* ne sont pas isomorphes (\dagger).

(\dagger) On montre même que $\dim(E^*) = \text{card}(E^*)$ (théorème d'Erdős-Kaplansky).

Partie II

On note $(E^*)^*$ par E^{**} . On l'appelle l'espace bi-dual de E .

II-1. Soit $x \in E$ et $\delta_x : E^* \rightarrow \mathbb{K}$ l'application définie par : $\forall \varphi \in E^*$, $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$. montrer que δ_x est linéaire, ie $\delta_x \in E^{**}$.

II-2. Soit $\delta : E \rightarrow E^{**}$ l'application définie par $\forall x \in E$, $\delta(x) = \delta_x$. Montrer que δ est linéaire.

II-3. Montrer que δ est injective. En déduire que : $\dim(E) < \infty \Leftrightarrow \dim(E^{**}) < \infty$ et que dans ce cas E et E^* sont isomorphes.

II-4. On suppose ici que $\dim(E) < \infty$. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base E et soient $\psi \in E^{**}$, $\psi(e_i^*) = \psi_i$. Montrer que $\delta(\sum_{i=1}^n \psi_i \cdot e_i) = \psi$. En déduire que δ est un isomorphisme.

Remarque. Alors que D (défini dans la partie I) est un isomorphisme entre E et E^* qui dépend du choix de la base \mathcal{B} , l'isomorphisme δ n'en dépend pas. On dit que δ est un isomorphisme canonique.

II-5. On veut Montrer que si $\dim(E) = \infty$, δ n'est pas surjectif. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E .

II-5.a. Montrer que la famille $\mathcal{B}^* = (e_i^*)_{i \in I}$ est une famille libre de E^* .

On complète cette famille en une base $\mathcal{E} = \mathcal{B}^* \cup \mathcal{C}$ de E^* et on note $G = \text{vect}(\mathcal{B}^*)$, $L = \text{vect}(\mathcal{C})$. On a alors $E^* = G \oplus L$. On note $\varphi = \varphi_G + \varphi_L$ la décomposition d'un élément $\varphi \in E^*$ sur la somme directe $E^* = G \oplus L$.

II-5.b. Soit $\psi : E^* \rightarrow \mathbb{K}$ l'application définie par : $\psi(\varphi) = \sum_{j=1}^n a_j$, lorsque $\varphi_G = \sum_{j=1}^n a_j e_{i_j}^*$. Montrer que $\psi \in E^{**}$ mais que $\psi \notin \text{Im}(\delta)$.

Partie III

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On considère ${}^t f : F^* \rightarrow E^*$ l'application définie par : $\forall \varphi \in E^*$, ${}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$.

III-1. Montrer que ${}^t f$ est linéaire.

III-2. Montrer que f est un isomorphisme ssi ${}^t f$ est un isomorphisme.

On suppose, à partir de maintenant, que $\dim(E) = n$, $\dim(F) = p$. Soient $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (b_1, \dots, b_p)$ une base de F . On note $M = \text{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$.

III-3. Donner $\text{Mat}(f, \mathcal{B}_F^*, \mathcal{B}_E^*)$.

III-4. Soit $r = \text{rg}(f)$. Montrer que l'on peut compléter une certaine famille $\mathcal{Y} = (y_1, \dots, y_r)$ de r éléments de $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ en une base $(y_1, \dots, y_r, c_1, \dots, c_{p-r})$ de F , avec $(c_1, \dots, c_{p-r}) \subset \mathcal{B}_F$.

III-5. Montrer que $({}^t f(y_1^*), \dots, {}^t f(y_r^*))$ est alors une base de $\text{Im}({}^t f)$. En conclure que $\text{rg}(f) = \text{rg}({}^t f)$.

III-6. Déduire de ce qui précède que le nombre maximal de colonne linéairement indépendantes dans M (ie $\text{rg}(M)$) est aussi le nombre maximal de lignes linéairement indépendantes de M . Retrouver dans le cas où $n = p$, que f est un isomorphisme ssi ${}^t f$ est un isomorphisme