Problème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E. Nous notons E^* l'ensemble des formes linéaires sur E, ie l'ensemble des applications linéaires $\varphi : E \to \mathbb{K}$. Remarquer que E^* est un espace vectoriel pour les lois usuelles sur l'espace des applications de E dans $\mathbb{K}$. On appelle E^* **l'espace dual de** E.

Partie I

I-1. Soient $E_i = vect(e_i)$, $F_i = vect(\mathcal{B} \setminus \{e_i\})$ et $\pi_i : E \to E_i$ la projection sur E_i associée à la somme directe $E = E_i \oplus F_i$. On note $e_i^* : E \to \mathbb{K}$ l'application définie par : $\forall\, x \in E,\ e_i^*(x) = [\pi_i(x)]_{(e_i)}$.
Montrer que e_i^* est l'application définie par : $\forall\, i_1, \cdots, i_n \in I, \forall\, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} e_i^*(\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot e_{i_j}) &= 0, \text{ si } i \notin \{i_1, \cdots, i_n\} \\ e_i^*(\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot e_{i_j}) &= a_k, \text{ si } i = i_k,\ k \in \{1, \cdots, n\}. \end{aligned}$$

Montrer que $e_i^* \in E^*$.

Soit D l'application définie par :

$$D : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E^* \\ x = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot e_{i_j} & \longmapsto & \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot e_{i_j}^* \end{array}$$

On notera $D(x)$ par x^*, de sorte que $D(e_i) = e_i^*$.

I-2. Montrer D est une application linéaire.

I-3. Montrer que D est injective. En déduire que $\dim(E^*) < \infty \Rightarrow \dim(E) < \infty$.

I-4. On suppose ici que E est de dimension finie et on note $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$. Soit $\varphi \in E^*$. On note $\varphi(e_i) = \epsilon_i$. Montrer que $(\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j \cdot e_j)^* = \varphi$.

I-5. Montrer que : $\dim(E) < \infty \Leftrightarrow \dim(E^*) < \infty$, et que dans ce cas E et E^* sont isomorphes et que $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \cdots, e_n^*)$ est une base de E^*. On dit que $\mathcal{B}^*$ est la **base duale de** $\mathcal{B}$.

On suppose maintenant que $\dim(E) = \infty$.

I-6. On veut montrer que D n'est pas surjective. Soit $\varphi : E \to \mathbb{K}$ l'application définie par $\varphi(\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot e_{i_j}) = \sum_{j=1}^{n} a_j$. Montrer que φ est linéaire, mais que $\varphi \notin Im(D)$.

I-7. Étant donnés deux ensembles A et B, on note B^A l'ensemble des applications de A dans B. En particulier $\mathbb{K}^I$ est le $\mathbb{K}$-espace des applications de I dans $\mathbb{K}$. Soit $f : E^* \to \mathbb{K}^I$ l'application définie de la façon suivante, $\forall \varphi \in E^*$:

$$f(\varphi) : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ i & \longmapsto & f(\varphi)(i) = \varphi(e_i) \end{array}$$

Montrer que f est un isomorphisme.

*** I-8.** Montrer qu'il existe une injection de $\{0,1\}^I$ dans $\mathbb{K}^I$, mais pas d'injection de $\{0,1\}^I$ dans I. En conclure que lorsque $\dim(E) = \infty$, E et E^* ne sont pas isomorphes (†).

(†) On montre même que $\dim(E^*) = \text{card}(E^*)$ (théorème d'Erdös-Kaplansky).

Partie II

On note $(E^*)^*$ par E^{**}. On l'appelle **l'espace bi-dual de** E.

II-1. Soit $x \in E$ et $\delta_x : E^* \to \mathbb{K}$ l'application définie par : $\forall\ \varphi \in E^*,\ \delta_x(\varphi) = \varphi(x)$. montrer que δ_x est linéaire, ie $\delta_x \in E^{**}$.

II-2. Soit $\delta : E \to E^{**}$ l'application définie par $\forall\ x \in E,\ \delta(x) = \delta_x$. Montrer que δ est linéaire.

II-3. Montrer que δ est injective. En déduire que : $\dim(E) < \infty \Leftrightarrow \dim(E^{**}) < \infty$ et que dans ce cas E et E^* sont isomorphes.

II-4. On suppose ici que $\dim(E) < \infty$. On note $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base E et soient $\psi \in E^{**}$, $\psi(e_i^*) = \psi_i$. Montrer que $\delta(\sum_{i=1}^{n} \psi_i \cdot e_i) = \psi$. En déduire que δ est un isomorphisme.

Remarque. Alors que D (défini dans la partie I) est un isomorphisme entre E et E^* qui dépend du choix de la base $\mathcal{B}$, l'isomorphisme δ n'en dépend pas. On dit que δ est un isomorphisme canonique.

II-5. On veut Montrer que si $\dim(E) = \infty$, δ n'est pas surjectif. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E.

II-5.a. Montrer que la famille $\mathcal{B}^* = (e_i^*)_{i \in I}$ est une famille libre de E^*.

On complète cette famille en une base $\mathcal{E} = \mathcal{B}^* \cup \mathcal{C}$ de E^* et on note $G = vect(\mathcal{B}^*)$, $L = vect(\mathcal{C})$. On a alors $E^* = G \oplus L$. On note $\varphi = \varphi_G + \varphi_L$ la décomposition d'un élément $\varphi \in E^*$ sur la somme directe $E^* = G \oplus L$.

II-5.b. Soit $\psi : E^* \to \mathbb{K}$ l'application définie par : $\psi(\varphi) = \sum_{j=1}^{n} a_j$, lorsque $\varphi_G = \sum_{j=1}^{n} a_j e_{i_j}^*$. Montrer que $\psi \in E^{**}$ mais que $\psi \notin Im(\delta)$.

Partie III

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. On considère ${}^t f : F^* \to E^*$ l'application définie par : $\forall \varphi \in E^*,\ {}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$.

III-1. Montrer que ${}^t f$ est linéaire.

III-2. Montrer que f est un isomorphisme ssi ${}^t f$ est un isomorphisme.

On suppose, à partir de maintenant, que $\dim(E) = n$, $\dim(F) = p$. Soient $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (b_1, \cdots, b_p)$ une base de F. On note $M = \mathcal{M}at(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$.

III-3. Donner $\mathcal{M}at(f, \mathcal{B}_F^*, \mathcal{B}_E^*)$.

III-4. Soit $r = rg(f)$. Montrer que l'on peut compléter une certaine famille $\mathcal{Y} = (y_1, \cdots, y_r)$ de r éléments de $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ en une base $(y_1, \cdots, y_r, c_1, \cdots, c_{p-r})$ de F, avec $(c_1, \cdots, c_{p-r}) \subset \mathcal{B}_F$.

III-5. Montrer que $({}^t f(y_1^*), \cdots, {}^t f(y_r^*))$ est alors une base de $Im({}^t f)$. En conclure que $rg(f) = rg({}^t f)$.

III-6. Déduire de ce qui précède que le nombre maximal de colonne linéairement indépendantes dans M (ie $rg(M)$) est aussi le nombre maximal de lignes linéairement indépendantes de M. Retrouver dans le cas où $n = p$, que f est un isomorphisme ssi ${}^t f$ est un isomorphisme